

日本连续30周畅销书排行榜第一名

图解 数学学习法

让抽象的数学直观起来

〔日〕畑村洋太郎 著　刘玮 译



不理解数学的本质，做再多题也没用。

观的图解，让你搞清楚抽象的数学概念、定理、公式，

本上提高你的数学理解力！

作者介绍

畑村洋太郎

日本东京大学工学博士，曾任日本工学院大学国际基础工学教授，目前为日本东京大学名誉教授。主要著作有《失败学的启发》、《失败学的进展》、《创造学》、《决定学的法则》、《设计的方法论》等。

责任编辑：林妮娜
特邀编辑：李玉珍
丛书策划：新经典文化 www.readinglife.com
封面设计：新经典工作室 · 徐蕊
封面插图：陈　昭



图解数学学习法
让抽象的数学直观起来

日本连续30周畅销书排行榜第一名

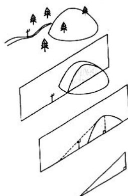
〔日〕畑村洋太郎 著 刘玮 译



南海出版公司
2008 · 海口

目　录

前言



1　找出看不见的直角三角形

知道山的高度又怎么样　2
怎样研究直角三角形　5
用长度比来表示角度　6
为什么要找出直角三角形　9
转动的棒　10
sin的由来　14

2　数字背后的意义

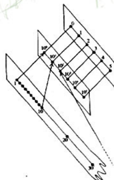
不可思议的“行列”　18
矩阵是怎么出现的　22
什么是矩阵　25
数字编组　29
矩阵乘法运算，为什么由→变成↓　32
矩阵活动漫画　42

$$\begin{pmatrix} 5 & 24 & 18 \\ 8 & 12 & 23 \end{pmatrix}$$

	WEGA（台）	VAIO（台）	PLAYSTATION（台）
新宿店	5	24	18
池袋店	8	12	23

3　改变视角，创造新数字

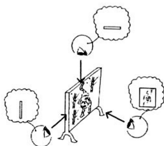
指数背后隐藏着什么　46
把大数字变成小数字　47
连接乘法和加法的桥梁　50



贷款和e　53
使用e很方便　58

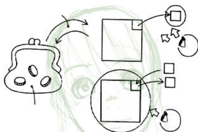
4　把复杂的问题变简单

为什么要学习这种怪东西　62
合二为一　63
复数的好处　66
虚数不是幽灵　72
窥探高斯脑子里的想法　76



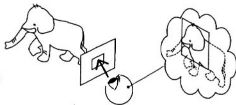
5　日常生活中隐藏着本质

运用生活感觉　82
将微分一分为二　85
积少成多　90
直观地理解微分　93
无法“返祖”　95
描绘微分和积分的关系　97



6　通过部分看整体

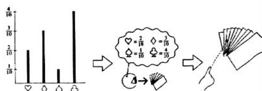
重要的事要提前交待　104
学微分方程学什么　106
微分方程的精髓　108
为什么微分方程不能应用　111
整体藏在部分之中　116



分离变量为什么很重要 118
解微分方程 119

7 未来被等分

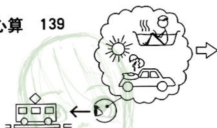
一切都可以换算成金钱 124
概率里的小花招 125
概率讲的是未来的事 127
概率里的思维转换 128
通过过去了解未来 133
概率就是大概的几率 135

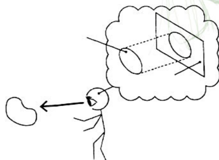


附录 1 直观的诀窍在于默记和心算 139

附录 2 自己算出来 147

Q&A 为什么不懂数学 153





前　言

40年来，我一直有一个愿望——“要写一本这样的书”，今天终于如愿以偿了。

这个念头最初萌芽于我19岁刚上大学的时候。当时，我怎么也听不懂数学课，我想：“大概是我太笨了，脑子好使的人应该早就听懂了。”

不过，好歹我也考上了东京大学，还算是个高材生，经过努力，终于跟上了课程的进度。但是，我心里还是不舒服，觉得有些地方没彻底弄明白。“为什么心里觉得不舒服呢？”我想来想去，终于明白了。原来我会解数学题，却不了解数学的本质。

意识到这个问题以后，我就很想买一本清楚地揭示数学本质的书。但是，找来找去也找不到。最后，我觉悟到只能靠自己的头脑去理解和揣摩数学的本质。

从此以后，我开始了艰苦的征途。我像一只筋疲力尽的狗，流着大汗，汪汪哀号，为探究数学的本质而战斗。即使成了机械工程学方面的专家，这种状况也没有改变。直到60岁即将退休的时候，我才稍微有了点自信，觉得自己总算把握了数学的本质。

可是，或许什么时候我两眼一闭，辛苦得来的成果就会被带进棺材里去。所以我决定，等到退休后有了时间，一定要将我的心得写成一本书。我一直在为此努力。2001年，我退休了，终于写成了这本书。

这本好不容易才得以面世的书，是写给下面这些人的：

1．数学很差，但想学好的人，特别是想尽早找到窍门的人。

2. 刚开始学数学的高中生，希望进行深入思考、理解数学的本质。

3. 学过数学，现在已经进入社会、参加工作的人，虽然工作中不一定要用到数学。

4. 至今还没有厌倦数学的人。

5. 正在学习数学的大学生。

6. 教授数学或是工程技术的老师。

7. 希望把握数学本质的人。

本书和普通的数学书完全不同。它讲的是高等数学，但不是教科书，不会教你怎么解数学题。所以，不要把它当成考大学的参考书。不过，我保证读了这本书，你就能轻松地把握数学的本质。

抓不住思想和概念的本质，就像是穿着借来的衣服，总觉得不舒服。在本书中，我尝试挖掘出数学中隐藏着的思想和概念。书中的讲解不是停留在表面上，而是追根究底，挖掘出上位概念。只有理解了上位概念，才能真正理解。把握了概念的本质，获得了直观的感受，才不会一知半解、糊里糊涂。

数学学习中最大的问题，是很多人对数学产生了厌倦情绪。高中分为文科、理科，有些人就是因为不想学数学而选择了文科。

但是，数学真的那么招人厌吗？的确，现在这种教学方法，让人无法不讨厌数学。为什么呢？很简单，因为学生们没有真正理解数学。

用填鸭式的教学方式向学生灌输知识，学生不厌倦才怪。没人想去理解自己讨厌的东西。因此，理解也就变得遥不可及。

数学中有很多定义、定理。老师会解释这些定义、定理的证明过程，这本来没有错。但是，很多学生觉得证明过程和自己无关。为什么呢？

因为学生觉得自己和老师身在两个世界里，老师们在数学的抽象世界里，自己则在现实世界中。老师们觉得理所当然的事，在现实世界中却显得不可理喻。找不到两个世界的交集点，就无法相互沟通。

但是，等等。其实我们的日常生活和数学的抽象世界是紧密相连的。例如，微分、积分和产业界紧密相关。生产量与社会整体活动成比例增长的机械制造业被称为“微分型产业”；现有生产量决定商业规模大小的维修业被称为“积分型产业”。

也就是说，数学老师只进行了抽象的解释，却没有向我们指明从现实世界进入抽象世界的路径。数学本来是人人都懂的东西。只要把日常生活和抽象世界紧紧联系起来，就能理解数学。

那么，怎样才算“理解”呢？理解就是外界的事物和头脑中原有的“模板”相符合。在本书最后的“Q&A”中我们还要详细谈到这个问题，请大家留意。总之，外界事物和头脑中的模板完全吻合，人们就觉得自己理解了这一事物。也就是说，理解是大脑中瞬间发生的、对对象的确认动作。换句话说，理解是一种直观感受。

有些人思想顽固，认为直观地理解是不科学的，这些人没有认真地思考什么是理解。我认为，要弄清楚什么是理解，必须参考脑科学的研究成果。脑科学研究证明，理解时，在大脑中浮现出事物的形象十分重要。从一个平面上来理解数学是不行的。数学是三维，甚至是多维的立体事物。本书中的每一章，都揭示了这个多维体的一个侧面。我的目标是把“难懂的数学”变成“易懂的数学”，再从“易懂的数学”变成“可以运用的数学”。理解了数学却不能运用，也是毫无意义的。

最后，在进入正文之前，我想谈一谈本书的出版经过。2001 年 3 月我从东京大学退休，最后一节课上讲道：“我想变成蝉。”30 多年来，我

一直埋首于大学这片“土壤”中，研究和教授工程学，过得很充实。但是，退休以后我却想像蝉一样爬出地面，在众人面前大声发表自己的言论。我想把自己一直以来的所思所想拿出来与大家分享。那节课结束时，我说：“从今以后，我要专心著书，比如我构思了40年的数学书。从今天开始，我正式退休了，我一定要写成这本书。”

岩波书店编辑部的永沼浩一听了我的最后一堂课，他一直记住了我的话。一年以后，他打电话来问：“老师，那本书写得怎么样了？”于是，我们一拍即合，决定出这本书。我退休后一直在工学院大学工作，我对学生们说：“我要写一本书，你们愿意帮忙吗?”学生们很高兴地答应了。于是，我把他们叫来，开了一个“畑村数学私塾”。每月不少于1次，每次上3个小时的课，坚持了几十次。他们向我倾诉了对数学的不满以及存在的疑问。永沼先生旁听并记录了我们讨论的主要内容。他还为我写了草稿，建议我采用合适的形式表达自己的想法。由于他的帮忙，这本书才得以完成。我向永沼先生表示深深的谢意。

另外，还要感谢长尾高明老师在百忙之中认真读完了我的书稿，提出了恳切的意见。

就这样，本书面世了。除了这本书，我还想写一系列书，主要是针对工科和理科的，如热力学、复变函数论、矢量张量、振动学等。全部完成大概要花上二三十年，我得好好利用有限的时间，争取多活几年了。

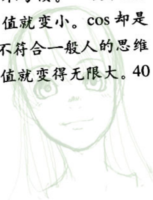
希望这本书能带给读者一些启发，从新颖有趣的角度来思考问题。如果能这样的话，我将万分欣慰。

畑村洋太郎

1……找出看不见的直角三角形

sin、cos

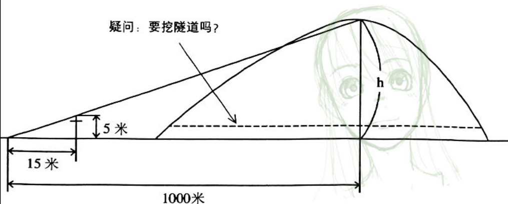
提起sin、cos，我就想起高中时一位朋友说过的话："我最讨厌sin、cos了。"不过，我从小就很喜欢数学，所以一开始接触三角函数时，并不觉得讨厌。sin还好，cos值会随着角度增大而变小，多少让人觉得不习惯。一般来说，应该是角度变大值就变大，角度变小值就变小。cos却是角度变大值变小，角度变小值变大，不符合一般人的思维习惯。更奇怪的是tg，角度接近90°，值就变得无限大。40年过去了，我依然觉得很不习惯。



●知道山的高度又怎么样

“学文科的人讨厌数学”已经成为一种“传统”。许多人选择文科就是因为可以不学数学。那么，大家是从什么时候开始讨厌数学的呢？很多人回答：“就是从 sin、cos 开始的。”有不少学理科的人也说：“最讨厌的就是 sin、cos。”他们一边不得不用着 sin、cos，一边在心里嘀咕：“这些东西有什么用？”

实际上我也是这样。小学六年级时，教数学的加藤老师对我们说：“测量电线杆的高度就可以知道山的高度。”然后在黑板上画了下面这个图。



$$h=\frac{5}{15}\times 1000(\text{米})\approx 333(\text{米})$$

加藤老师是这样讲解的：抬头看电线杆的角度和抬头看山顶的角度是一样的。已知自己到电线杆的距离和电线杆的高度，黑板上画的两个三角形是相似的，所以只要测量自己到山顶正下方的直线距离，就可以知道山的高度。

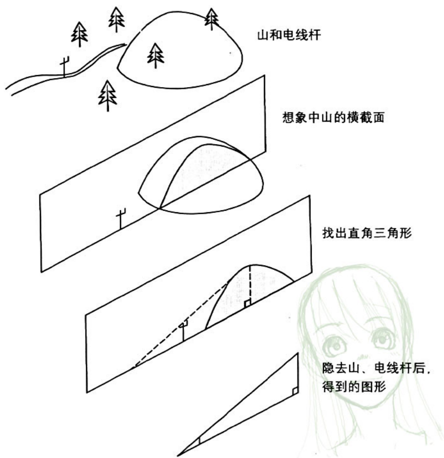
听了讲解，我马上在心里大叫："不可能！"想想看，怎么测量自己到山顶正下方的直线距离呢？挖条隧道吗？加藤老师大概是为了让大家更容易理解，才举了这个例子。但是，学生看了这样的例子，注意力很容易被吸引到与数学无关的东西上。而且，硬要说这种不合常理的事在现实中存在，学生就更加疑惑不解了。一来二去，数学就沦落到"人见人厌"的地步。我活到现在60多岁了，从没听说过有人用这种方法来测量山的高度。

其实知道山的高度并不重要，重要的是看着山，在脑海中描绘出看不见的三角形。加藤老师想教给我们的，应该是这一点吧。



数学1·2·3

为了让学生更容易理解，老师在讲解数学时，往往会举日常生活中的例子来说明。但是，老师所举的例子中，除了想教的数学知识，往往还有其他要素。学生和老师的视角不同，喜欢从日常生活的角度来看这些例子，因此容易被与数学无关的东西吸引，枉费了老师的苦心。一旦注意力放错了地方，学生的头脑就转不过弯儿了。而老师不知道学生的注意力已经走岔了，会想："这么简单的问题都不懂，这帮孩子真是没救了。"老师与学生的思维方式的差异，已经成为数学教学的一大阻碍。可惜很少有老师注意到这一点。

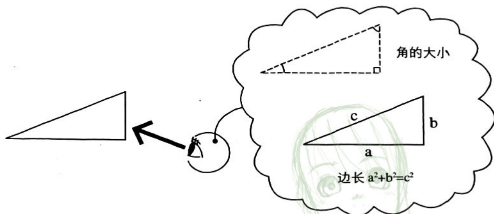


请看上面的图，最重要的是思维过程。看到具体事物——山，在大脑中画出抽象图案——直角三角形。像这样，从具体到抽象的思考活动，是理解事物的开始。

●怎样研究直角三角形

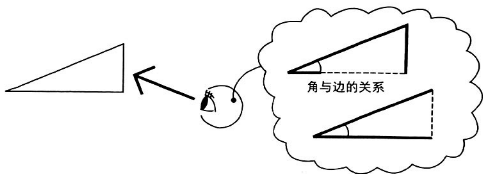
找出了看不见的直角三角形，接下来该怎么研究这个直角三角形呢?

看到直角三角形，我们通常会联想到以下特征。



也就是说，当我们看到直角三角形时，首先关注的是“角度”和“边长”。看它的三个角中是否有一个角是90°，或者三条边的长度是否符合勾股定理：$a^2+b^2=c^2$。

这是一般的思考角度。sin、cos并不是从这个角度来研究直角三角形的。它们探讨的是“角”与“边”的关系。



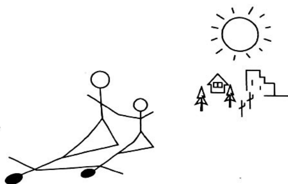
按照一般的想法，角是角，边是边。但 sin、cos 却另辟蹊径——研究角和边的关系。

●用长度比来表示角度

那么，怎样研究角和边的关系呢？

下面我们进入本章的正题：sin 和 cos。抽象的思考方式容易让人陷入数学的迷宫。前面已经强调过，最重要的是掌握从具体到抽象的思考方法，从日常生活的具体事物中找出看不见的三角形。现在我们就转换一下头脑，从日常生活中的具体事物说起。

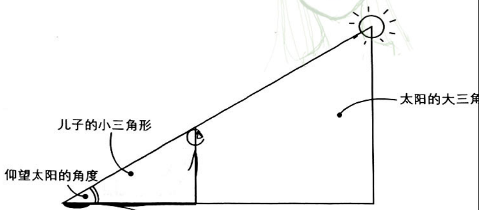
让我们来想象一下父子二人手牵着手走在夕阳下的画面。爸爸和儿子手牵着手，地上的影子也手牵着手。爸爸的影子长，儿子的影子短。儿子贪玩摆摆手，地上的影子也摆摆手。



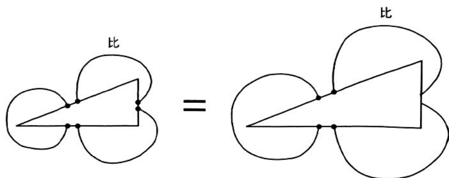
儿子忽然问："爸爸，太阳有多高？"

这一问可难住了爸爸。太阳离地球这么远，追问"太阳离地面的距离"，谁能答得出来呢？不过，爸爸想出了一个办法：能不能用仰望太阳的角度来表示"太阳有多高"呢？

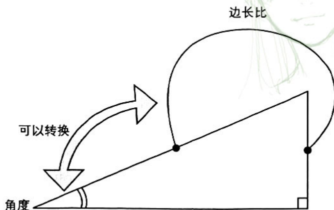
可是没法用量角器去测量仰望太阳的角度呀。怎么办呢？爸爸低头看见自己的影子，心想："能不能利用影子的长度呢？"于是，爸爸看看太阳，又看看儿子的影子，脑海中浮现出下面这个直角三角形。



从上图可以看出，太阳的大三角形和儿子的小三角形是相似三角形。相似的两个图形最重要的特征是对应边长的比例相等。也就是说，不论三角形的大小怎样变，对应边长的比都是相等的。



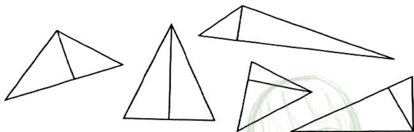
这样，不论三角形的大小怎样变，角和边的关系都是一定的。sin、cos 利用了相似图形的等比关系，用边长的比来表示角度大小。



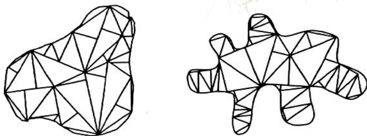
●为什么要找出直角三角形

反应快的读者可能已经发现了问题：“为什么一定要找出直角三角形？难道有什么特别的原因？”你说对了，直角三角形确实非常特别。

三角形的种类多种多样，有等边三角形、等腰三角形等。为什么我们一定要找出直角三角形呢？那是因为所有的图形都是由直角三角形组成的。例如：



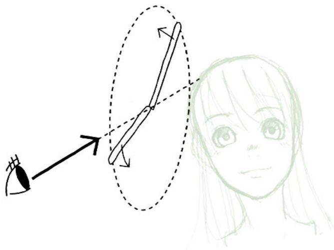
像上面这样，所有的三角形都可以看做是直角三角形的组合，同样，无论什么形状的图形，都可以看做是直角三角形的组合。



也就是说，有形物体中到处都隐藏着直角三角形。通过直角三角形来理解事物的性质和本质，是最简单、最根本的方法。这就是为什么我们要找出物体中隐藏的直角三角形的原因。

●转动的棒

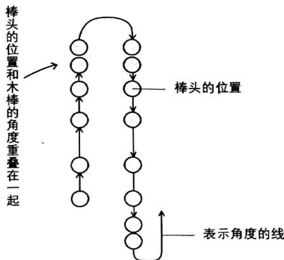
旧式的直升飞机，引擎发动时，螺旋桨会呼呼转动。现在有一根木棒，想象它像螺旋桨那样不停转动。然后，我们从侧面来看这根转动的棒。



注意看木棒的一头，你看到了什么？

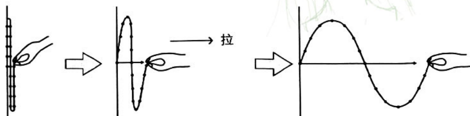
如下图所示，随着木棒的转动，棒头的位置上下移动。

要把眼睛看到的照原样画出来，只能画成下页图这样。可是，这张图很难看懂。有没有办法让它更好理解呢？

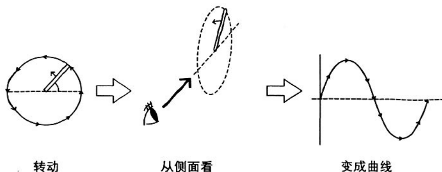


上面的图很难看懂，是因为图中表示棒头位置的线和表示角度的线混在一起，不好区分。怎么才能更容易看懂呢？有一个好办法，就是把重叠在一起的表示棒头位置的线和表示角度的线分开。

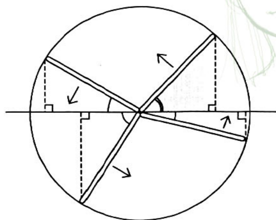
如下图所示，把代表角度的线横向拉出来，有趣的现象出现了，我们现在看到了一条曲线。



真神奇！刚才我们是从侧面看转动的木棒。略施小计，转动的木棒就变成了摇啊摇的曲线了！



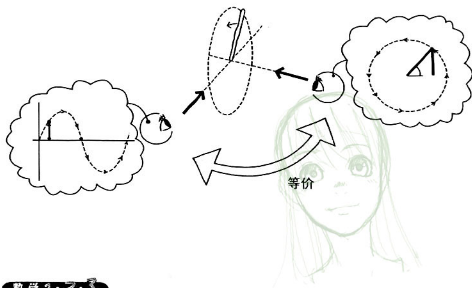
现在我们用曲线的高度来表示木棒的角度，请大家注意。前面讲过，角度能用长度来表示，说明和直角三角形有关。也就是说，图中肯定隐藏着直角三角形。那么它在哪儿呢？从正面来看转动的棒，就会发现直角三角形。



也就是说，曲线里隐藏着直角三角形。

像前面一样，找出看不见的直角三角形后，我们开始思考“角度的大小”和“边长”的关系。这就是 sin 、cos。要注意的是，不论是 sin、cos，还是曲线，表示的都是同一根木棒的转动。用 sin、cos 来表示木棒的角度，和用曲线的高度来表示木棒的角度，是相同的。

也就是说，曲线就是 sin、cos。这种曲线又叫“正弦曲线”、“余弦曲线”。

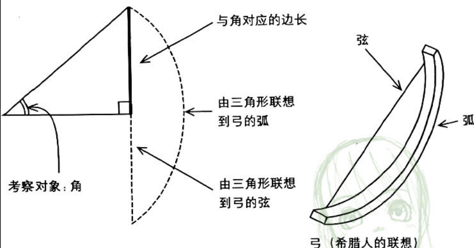


数学1·2·3

关于三角函数的加法定理，各地都有不同的顺口溜。我到现在还记得是“一减tg、tg，tg加tg”，即 $\mathrm{tg}(\alpha+\beta)=(\mathrm{tg}\,\alpha+\mathrm{tg}\,\beta)/(1-\mathrm{tg}\,\alpha\,\mathrm{tg}\,\beta)$。公式早已经忘记了，但顺口溜一直都记着。像我这样的人一定不少吧。虽然不知道意思，但只要像念经一样记住，就会深深印入脑海，无法抹去了。

● sin 的由来

据说现在我们所说的sin，希腊人称为jiva（意思是“弦”）。怎样用长度表示角度呢？希腊人脑海中浮现了下面的画面：

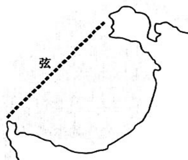


他们从弓这个武器上得到灵感，用jiva来命名这个概念。

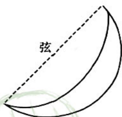
在传播的过程中，阿拉伯人将jiva译为jayb。jayb在阿拉伯语中表示“凹下去的地方，入江口”。欧洲人又把jayb翻译为sinus，sinus在拉丁语中也表示“凹下去的地方，入江口”。最后，英国人把sinus翻译为他们的本土语言，就变成了sine。省略末尾的e，就变成了sin，一直沿

用至今。

日语把sin译做“正弦”，这是直接借用中国明朝时的汉语译法。中国人把sin译做“正弦”，比起欧洲人译做“凹下去的地方，入江口”，更忠实于希腊人的原意。只不过中国人联想到的可能不是“弓”，而是“上弦月”。汉诗中经常描写美丽幽静的月夜。所以，我觉得把“弦”看做“上弦月”解更符合中国人的审美情趣。



入江口（欧洲人的联想）



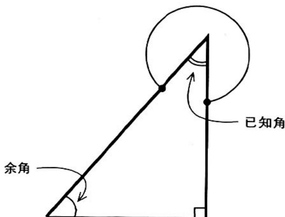
上弦月（中国人的联想）

不过，正弦的“正”字不是“正确”的意思，而是“标准”、“根源”的意思。也就是说，“用长度表示角度”是从sin开始的。

sin是“用长度表示角度”的开始，这一点只要看看cos是怎么来的，就能明白。cos的概念产生于印度。印度人了解了sin的概念后，就把余弦看做“余角的正弦”。

数学1·2·3

比起sine，去掉e后的sin写起来更方便，看起来也更像是一个数学符号。



印度人把余角的正弦称做cotijiva。与sin从西方传到东方相反，cos从东方传到了西方，人们叫它sinus residui（余角的正弦）、sinus compkenti（补足的正弦）、co-sine（共正弦），最后统一为cos。

cos又叫余弦，如字面所示，它是“余角的正弦”。用现代数学符号表示，就是 $\sin(90°-\theta)=\cos\theta$ 。从“余”字可以看出，已知角已经确定为直角三角形中一个锐角θ。也就是说，已知角的余角的正弦就是θ的余弦。这样，从正弦衍生出了余弦的概念。

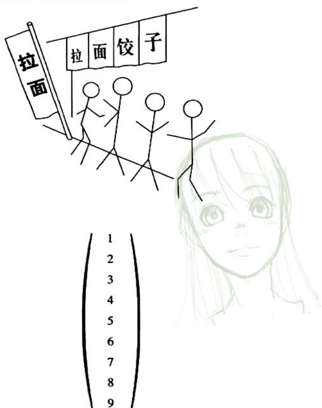
2……数字背后的意义

矩阵

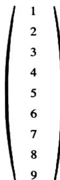
听到“行列”会马上想到矩阵的人，都是些怪人吧。说到“行列”，一般人会联想到“一排小吃店”。年纪大的人也许还会想起二战后初期等待发放配给的长长队伍。排着队等啊等，终于轮到自己了，领到的是一根大葱。二战刚结束的东京，一根5厘米长的大葱就是一家7口晚上的菜。与日常生活密切相关的画面会深深印入人们的脑海。对有些人来说，“行列”这个词就跟食物连在了一起。一个词的意思和它引起的联想完全不同，还真是难办啊。

●不可思议的“行列”

打开数学教科书，会发现书上写着“行列”[1]就是“竖排和横排的数字”。我一直觉得这个说明很拙劣。普通人听到“行列”，想起的是“队伍”，通常是指“竖排着的一队人”。我喜欢吃拉面，一听到“行列”（队伍）就会想起拉面店门口排起的长龙。



所以，



$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix}$$

---

①日语中“行列”有“队伍”、“矩阵”的意思——译者注。

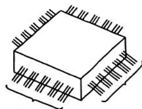
这个叫“行列”（队伍）还好理解，而

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

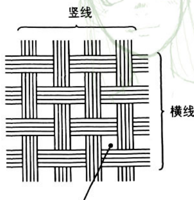
为什么也是“行列”（矩阵），就让人摸不着头脑了，它看起来根本就不是一“列”数。

矩阵这个概念产生于19世纪的欧洲。英语叫做Matrix。Matrix的意思是“母体，基质，水泥之类的固定剂”。

例如，在我熟悉的材料工程学领域，Matrix就是指纤维增强塑料（Fibre Reinforced Plastic，简称FRP）的基质。FRP是一种复合型材料，它用塑料来填充纵横交错的纤维之间的空隙。Matrix就相当于其中的塑料部分。



FRP的切面



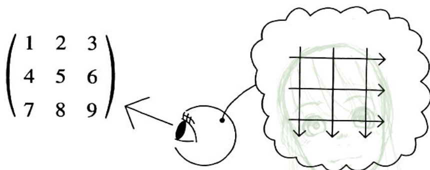
填充空间的塑料（Matrix）

总之，Matrix 就是指为了形成一个整体，要填充进去的填充物。

从Matrix的本义出发，我们就能想象出数学中的Matrix长什么样儿。大概西方人看到

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

认为数字填充在了括号的空间里，所以称它为 Matrix。



日本人万万没想到Matrix是这个意思，也很难理解这种思维方式。不过，数学原本就是西方的东西，抱怨也没用。我们不得不承认，西方人就是这么理解的。西方人看到Matrix产生的联想和日本人看到“行列”产生的联想完全是两样的。

那么，为什么日本人要把 Matrix 译成“行列”呢？和“行列”对应的英语单词应该是 Que 才对。该不会是明治时期的日本人根本不理解

Matrix这个词吧。

把Matrix译成日语，只能译成“填充物”、“母体”、“基质”等。但是，这些词日本人即使听了也摸不着头脑，不知道是在说什么，那怎么办呢？

日本人发现数字排成了横排、竖排，于是开始根据自己的理解来命名Matrix。前面说过，我很不满意把矩阵译做“行列”。数学老师经常在黑板上写上

行 →

列 ↓

这两个字，让学生记住“行是横向，列是竖向”。乍一听，这个解释很合理，有人会想 “名字取得真好”。但再仔细想想，就觉得牵强附会了。

数学1·2·3

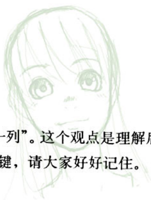
Matrix这个词不好理解。它表示使物体成形的基质，我们也用Matrix来表示人类社会的一种组织形式。这时的Matrix指的是像棋盘上的横线和竖线一样交错形成的矩阵形式。只有竖线会产生空隙，有了横线，组织就变得严密起来，可以作为一个有机体运转。

虽然“行”本意是指横向，但在文字竖写的日本，“行”却是竖向的。我们不会把横着排列的数字看做“一行”、“两行”，而是认为“行”表示竖着排列的一排字。更何况在明治时期，很少有人会横着写字。因此“行列”这个词就显得很滑稽了。感觉它滑稽是正常的，你见过拉面店店员冲顾客叫“竖着排成一列”吗？

要理解概念，必须先了解发明这个概念的人的思路。那么，在英语中，是怎样称呼Matrix的数字排列方式呢？横排的数字称为Row，竖排的数字称为Column。Row表示“排、横线”，Column表示“支柱、竖着摞着的东西”。

这样看来，西方人认为Matrix是像

$$
\begin{matrix}
(1 & 2 & 3) \\
(4 & 5 & 6) \\
(7 & 8 & 9)
\end{matrix}
$$



这样，竖着摞起来的几排数字每一排就叫“一列”。这个观点是理解后面我们将要谈到的“矩阵是怎么出现的”的关键，请大家好好记住。

●矩阵是怎么出现的

西方人为什么会发明矩阵呢？这和方程组有关。19世纪时，欧洲的数学家们十分苦恼。因为随着物理学的发展，十分麻烦但又不得不解的方程组越来越多了。

下面就是令他们头痛的方程组。

$$x+5y+2z+p+2q=9 \cdots\cdots ①$$

$$4x+6y+z+2p+2q=12 \cdots\cdots ②$$

$$9x+3y+z+3p+3q=6 \cdots\cdots ③$$

$$3x+2y+7z+8p+7q=1 \cdots\cdots ④$$

$$x+y+z+p+q=5 \cdots\cdots ⑤$$

这个方程组并不难，想解的话也能解得出来。但是，它太烦琐了。方程式再继续增多，要统一所有 x 的系数然后把它消去……简直是一项不可能完成的任务。有没有更简单的方法可以一举解决它呢？数学家们想偷懒，于是发明了 Matrix 的概念。

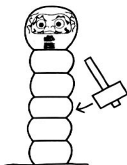
他们是怎么做的呢？首先把方程式①～⑤写成下面这样。

$$\begin{matrix}(1 & 5 & 2 & 1 & 2) \\ (4 & 6 & 1 & 2 & 2) \\ (9 & 3 & 1 & 3 & 3) \\ (3 & 2 & 7 & 8 & 7) \\ (1 & 1 & 1 & 1 & 1)\end{matrix} \times (x \quad y \quad z \quad p \quad q) = \begin{matrix}9 \\ 12 \\ 6 \\ 1 \\ 5\end{matrix}$$

这么一来，啊，不可思议！原本令人头疼的方程组，一下子变简单了。令人高兴的是，答案也好像呼之欲出了。

于是，像下页图这样，

$$(1\quad 5\quad 2\quad 1\quad 2)$$
$$(4\quad 6\quad 1\quad 2\quad 2)$$
$$(9\quad 3\quad 1\quad 3\quad 3)$$
$$(3\quad 2\quad 7\quad 8\quad 7)$$
$$(1\quad 1\quad 1\quad 1\quad 1)$$



左边括号里的一行行数字就像是以前玩“打达摩”①时叠起来的圆木块。要解令人头疼的方程组，只要把括号里的数字看成一个整体进行某种操作，即变成求整个方程组中

$$(x\quad y\quad z\quad p\quad q) = ?$$

数学1·2·3

“进行某种操作”即“乘以逆矩阵”。逆矩阵是使等号左边变成单纯的(x, y, z)的工具。高中数学中经常练习求二元一次方程组的逆矩阵。不过现在没必要人工计算逆矩阵，只要把矩阵输入计算机，就能在瞬间得出逆矩阵。

---

①打达摩是日本的一种传统游戏，由多个摞起的圆木块组成，最上面的木块画着达摩的脸——编者注。

把所有的数字放进一个括号里，矩阵就真的像一个“达摩”了。

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 & 2 & 1 & 2 \\ 4 & 6 & 1 & 2 & 2 \\ 9 & 3 & 1 & 3 & 3 \\ 3 & 2 & 7 & 8 & 7 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$



你可能会想：“这些数字之间没有什么联系，怎么能把它们看成一个整体呢？”

完全没问题。最重要的是使它成为一个规则。大家都认同这个规则，就 OK 了。实际上在欧洲，Matrix 这个崭新的概念就是这么产生的。

日本人怎么也想不到 Matrix 是这么产生的。

Matrix 的概念是丰富想象力的产物，可以说是前所未有的创新，让我们不得不叹服西方人的抽象思维能力。

●什么是矩阵

现在请大家想想教科书上是怎么解释矩阵的。

教科书中一般会这样讲解。

下面的表中统计了P、Q两家电子产品店一天卖出的商品数量。

	电视机（台）	计算机（台）	游戏机（台）
P电子产品店	5	24	18
Q电子产品店	8	12	23

从表中抽取数字，用括号括起来。

$$\begin{pmatrix} 5 & 24 & 18 \\ 8 & 12 & 23 \end{pmatrix}$$

像这样，把数字排成长方形，就叫矩阵。组成矩阵的各个数字叫做矩阵元素。矩阵元素中横排的叫做行向量，竖排的叫做列向量。

把抽象的“P电子产品店”、“Q电子产品店”、“电视机”、“计算机”、“游戏机”，换成具体的店名或品牌会更有真实感。比如像下面这样。[1]

	WEGA（台）	VAIO（台）	PLAY STATION（台）
新宿店	5	24	18
池袋店	8	12	23

如果按教科书上说的，就是从表中抽取数字，

① WEGA、VAIO、PLAY STATION是日本索尼公司的液晶电视、计算机和电子游戏机的品牌。

	WEGA（台）	VAIO（台）	PLAY STATION（台）
新宿店	5	24	18
池袋店	8	12	23

5　24　18

8　12　23

然后放进括号里，变成

$$\begin{pmatrix} 5 & 24 & 18 \\ 8 & 12 & 23 \end{pmatrix}$$

这样的数字组合就叫矩阵。但是，这样的说明很容易引起误解。

为什么呢？举个例子来说，向孩子解释什么是数字2是很困难的。想想就知道了，我们大人已经习惯了抽象的数字，所以不难理解2。但是，孩子们能够理解的是2个人、2匹马、2枝铅笔等带有量词的具体数值。

矩阵也是一样。比如，

$$\begin{pmatrix} 5 & 24 & 18 \\ 8 & 12 & 23 \end{pmatrix}$$

单看矩阵中5、24、18、8、12、23这几个抽象的数字，看1000遍也不能帮我们理解矩阵的本质。矩阵中数字后面附带的量词往往不会写出来，在它背后潜藏着“某某店卖出多少台”这种具体的现实意义。也就是说，任何一个数字都不是抽象的，而是具体的。

我担心的是，教科书中说“只抽取数字”，会使学生忽视数字背后潜藏的意义。而且，学校的课堂上还会让学生重复进行下面这种毫无意义的矩阵计算练习。

$$\text{请计算}\quad \begin{pmatrix} 9 & 5 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \\ 7 & 7 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 8 & 4 & 2 \\ 6 & 1 & 9 \\ 5 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

这样，只会计算方法，却不知道这样计算有什么意义，只能使学生越来越厌倦，开始讨厌数学。

矩阵这个概念最基本的要点如下：

$$\begin{pmatrix} 5 & 24 & 18 \\ 8 & 12 & 23 \end{pmatrix}$$



	WEGA（台）	VAIO（台）	PLAY STATION（台）
新宿店	5	24	18
池袋店	8	12	23

看到矩阵，在脑中就应该浮现出原来的数据表。反过来说，能够还原为原来的数据表的矩阵才能叫做矩阵。不能还原为数据表的矩阵不算矩阵，只是单纯的数字排列。

●数字编组

我们再来回头看刚才的表。

	WEGA（台）	VAIO（台）	PLAY STATION（台）
新宿店	5	24	18
池袋店	8	12	23

现在，公司采购部负责索尼产品的川上看了这个表，会想到什么呢？不错，正是两个店的“销售额”。新宿店和池袋店是公司最重要的两个店铺。这两个店每天的销售额有多少，必须好好观察。

要计算销售额，必须知道WEGA、VAIO、PLAY STATION的定价。上面的表格中只有卖出的数量，但在川上的眼里，数字的背后隐藏着各种商品的定价。

假设VEGA的定价是20万日元，VAIO的定价是18万日元，PLAY STATION 的定价是2万日元。我们就能简单计算出销售额。

新宿店的销售额：

$$(5\times20) + (24\times18) + (18\times2) = 568（万）$$

池袋店的销售额：

$$(8\times20) + (12\times18) + (23\times2) = 422 \text{（万）}$$

川上每天这样计算，观察两个店的销售额。但是仔细看看，同样一个算式，他重复了两遍。每次都要重复同样的计算，渐渐地川上就想："一遍一遍算可真麻烦。"于是，他开始观察这些算式的共同点，思考能不能把它们总结成一个算式。

两个店每天卖出去的 VEGA、VAIO、PLAY STATION 的数量各不相同。我们把卖出去的数量用 a、b、c、d、e、f 来表示。上面的表就变成这样：

	WEGA（台）	VAIO（台）	PLAY STATION（台）
新宿店	a	b	c
池袋店	d	e	f

另外，定价是不变的。列出来就是这样：

	WEGA	VAIO	PLAY STATION
定价	20 万日元	18 万日元	2 万日元

川上想知道的是"新宿店的销售额"和"池袋店的销售额"。要知道答案，不能光看表格，要把它转化成下面的算式。

$$? = \begin{pmatrix} (a \times 20)+(b \times 18)+(c \times 2) \\ (d \times 20)+(e \times 18)+(f \times 2) \end{pmatrix}$$

这样思考的话，表格里的文字和表格线都是多余的。川上眉头一皱，心生一计，把文字和表格线抹去，只留下“销售数量”和“定价”，把它们各归为一组。

比如说，像下面这样，把“新宿店的销售数量”、“池袋店的销售数量”、“定价”分别放进括号里，看起来就像是一道数学题了。

(a台 b台 c台)　(20万日元 18万日元 2万日元)

(d台 e台 f台)

这里要注意的是

(a台 b台 c台)

(d台 e台 f台)

这个“销售数量”的组合形状，是不是在哪里见过？不错，就是前面“打达摩”游戏中的圆木块。把摞起来的圆木块看成一个整体，这是西方人的思考方式。虽然不是一个店的，但它们都是“销售数量”，没有理由不能看成一个整体。所以，可以把它改写成

$$\begin{pmatrix} a台 & b台 & c台 \\ d台 & e台 & f台 \end{pmatrix}$$

的形式。

不过，“台”字混在里面，还是不像数学。于是，我们就把“台”字从括号里赶出来，写成

$$\text{台}\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix}$$

关键是，量词“台”不一定要写出来。只要心里记住这组数值表示什么，省略掉量词也没关系。

那么，只要记住这组数字是表示“销售数量”，我们就可以把括号外的“台”字抹去，写成下面这样就行了。

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix}$$

●矩阵乘法运算，为什么由→变成↓

我们已经把数据表转化成了矩阵，下面的问题是怎样使用下面两个矩阵

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix} \qquad (20 \quad 18 \quad 2)$$

来填充算式的左边。

$$? = \begin{pmatrix} (a\times 20)+(b\times 18)+(c\times 2) \\ (d\times 20)+(e\times 18)+(f\times 2) \end{pmatrix}$$

首先，从直观上我们会发现，把这两个矩阵放近一点，看起来很像是乘法算式。

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 20 & 18 & 2 \end{pmatrix}$$

求新宿店、池袋店的销售额可以表示为

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 20 & 18 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (a \times 20) + (b \times 18) + (c \times 2) \\ (d \times 20) + (e \times 18) + (f \times 2) \end{pmatrix}$$

有人会想，不对啊，我们在学校里学到的矩阵的乘法是下面这样。

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 20 \\ 18 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (a \times 20) + (b \times 18) + (c \times 2) \\ (d \times 20) + (e \times 18) + (f \times 2) \end{pmatrix}$$

“乘数矩阵（即定价组）”应该竖着写吧？学校里确实是这么教的。但是，好好想想，

$$\begin{pmatrix} 20 \\ 18 \\ 2 \end{pmatrix}$$

的写法多少有点不自然吧？列出销售数量时，川上一直都是按① WEGA →② VAIO →③ PLAY STATION 的顺序横着排列数字的。

$$\begin{matrix} ① \rightarrow ② \rightarrow ③ \\ \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix} \end{matrix}$$

为什么定价就要竖着排列呢？

$$\begin{pmatrix} 20 \\ 18 \\ 2 \end{pmatrix} \begin{matrix} ① \\ \downarrow \\ ② \\ \downarrow \\ ③ \end{matrix}$$

好好想想，实在说不通。

可是，没人告诉我们为什么要竖着排。向教科书求救，教科书上总是说“就是这样，记住它”，一个解释都不给。那么，现在我们就来探讨一下矩阵乘法中“乘数矩阵”中的数字为什么要竖着排。

请注意，被乘数矩阵、乘数矩阵是这样的。

被乘数矩阵

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix}$$

乘数矩阵

$$\begin{pmatrix} p & q & r \end{pmatrix}$$

举例来说。

现在新宿店、池袋店在进行“买电子产品返现金”促销活动。买WEGA返3500日元，买VAIO返5000日元，买PLAY STATION返1000日元。川上觉得应该计算一下两个店实际的销售额。

于是，他很自然地列出了下面的算式。

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 20 & 18 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -0.35 & -0.50 & -0.10 \end{pmatrix}$$

可是，川上一看，觉得这个算式真是又臭又长。而且，自己要算的不只是“总销售额”和“返还现金总额”，还要算“总收益”、“总支出”等。所以还得把它们添在乘数矩阵里。这样的话，横着就要写出一大串了。

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 20 & 18 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -0.35 & -0.50 & -0.10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bullet & \bullet & \bullet \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bigstar & \bigstar & \bigstar \end{pmatrix} \cdots$$

↓一直排下去

这时，川上注意到了乘数矩阵（20 18 2）下面的空格。

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 20 & 18 & 2 \\ & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -0.35 & -0.50 & -0.10 \end{pmatrix}$$

←空格

把（−0.35 −0.50 −0.10）移到空格那里，乘数矩阵就变成竖着排列的了。

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix} \begin{matrix} (& 20 & 18 & 2 &) \\ (& -0.35 & -0.50 & -0.10 &) \end{matrix}$$

这样排看起来就精炼多了。可是，刚高兴没几分钟，川上又发现这下子竖向变得又臭又长。

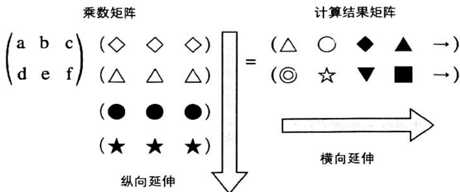
$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix} \begin{matrix} (& 20 & 18 & 2 &) \\ (& -0.35 & -0.50 & -0.10 &) \\ (& \bullet & \bullet & \bullet &) \\ (& \bigstar & \bigstar & \bigstar &) \end{matrix}$$

⋮ 又臭又长
↓

这样一来，没完没了的数字队伍从横向变成了纵向，问题还是没解决。该怎么办呢？

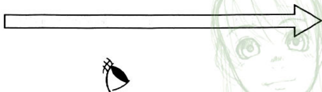
川上注意到了矩阵延伸的方向。“乘数矩阵”向纵向延伸，“计算结果矩阵”向横向延伸。

乘数矩阵和计算结果矩阵的延伸方向不一样，让川上觉得很奇怪，



总觉得不对劲。一般来说，算式都应该是从左向右进行计算啊。

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 = 28$$



看算式时，我们习惯横向从左看到右。所以，

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix} \begin{matrix} (& 20 & 18 & 2 &) \\ (& -0.35 & -0.50 & -0.10 &) \end{matrix}$$

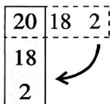
这种写法虽然没有错，但看起来不顺眼。

乘数矩阵的延伸方向也必须是横向。虽然如此，也不能像前面那样，

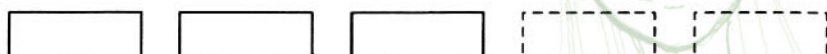
$$(20 \ 18 \ 2)(-0.35 \ -0.50 \ -0.10) \cdots\cdots\rightarrow$$

这样排下去。那怎么办呢？要横向排下去，但不能变得又臭又长，我们必须找到这种排列方法。

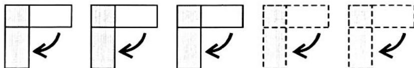
聪明的川上想，把乘数矩阵的各个数字纵向排列怎么样？



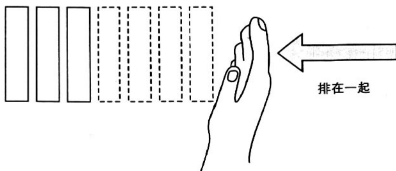
像这样，让乘数矩阵垂下来。于是，不论横向加进多少矩阵，



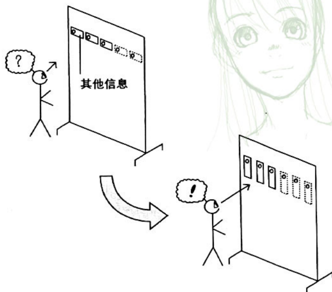
都可以让它们“垂下来”。



然后排在一起，就不会变得很长了。



比如，想象一下你看布告栏的情形。你只找前面标有◎的信息。如果这些信息横着排，◎和◎之间就可能混入其他信息，不好找。但是，如果信息都竖着排，◎和◎互相挨着，就好找多了。



像这样，改变乘数矩阵中数字的排列方式，原来的算式就变成了

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 20 \\ 18 \\ 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -0.35 \\ -0.50 \\ -0.10 \end{pmatrix}$$

这就是现在我们在用的矩阵积的表示方法。

最后要注意的是数值排列的规律。最开始川上是这样排列的。

① ⇒ 横向排列

WEGA　VAIO　PLAY STATION

(◇　◇　◇)　②

(△　△　△)

(●　●　●)

(★　★　★)



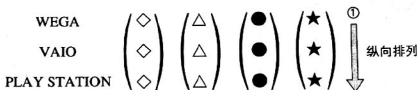
纵向延伸

①按“WEGA → VAIO → PLAY STATION”的顺序横向排列数值，并用括号括起来。②像“打达摩”游戏中的圆木块一样纵向延伸。但是，我们把它改写成下面这种形式：

数学1·2·3

实际生活中也有这样的例子。寺庙和神社的功德簿、祭祀庆祝活动的捐献簿上，会竖着写捐献金额，捐献者的地址、姓名，按金额从多到少，从右向左排列着。读者朋友可以去寺庙和神社看看。这里就用到了矩阵中蕴含的智慧。

② 横向延伸



①纵向排列数值，用括号括起来。②横向延伸。

这种表示方法的好处在于“乘数矩阵”和“计算结果矩阵”的延伸方向统一，都是横向。

乘数矩阵



计算结果矩阵

(△ ○ ◆ ▲ ⟹ 横向延伸)

(◎ ☆ ▼ ■ ⟹ 横向延伸)

因此，这种表示形式同时满足了两个条件:

- 节约空间。
- 符合从左向右看算式的习惯。

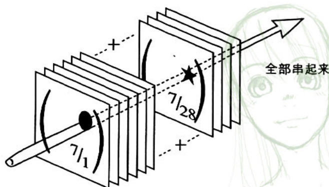
正因为如此，矩阵乘法的表示方式就这样定了下来。

●矩阵活动漫画

理解了矩阵乘法，可能你又想问："那么矩阵的加法、减法又是怎么一回事呢？"比如说，分别统计新宿店和池袋店 7 月份售出的 WEGA、VAIO、PLAY STATION 的数量。关于每个店销售数量的矩阵是：

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix}$$

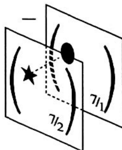
列出 7 月 1 日到 7 月 31 日每天的销售数量矩阵，一共 31 个。



把31个矩阵叠放在一起。然后把每天对应的数值相加。这就是矩阵的加法。

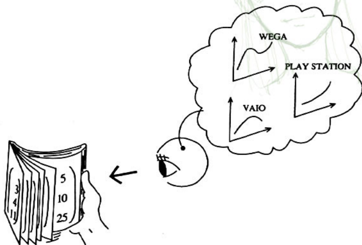
再比如，要计算新宿店和池袋店 7 月 2 日的销售数量比 7 月 1 日增加（减少）多少。与计算矩阵的和一样，把 7 月 1 日的矩阵和 7 月 2 日的矩

阵叠放，对应的数值相减，这就是矩阵的减法。



看了这个图，我想起了以前一些书的附录中的“活动漫画”。这可以说是“矩阵活动漫画”。真正的活动漫画在翻动的时候，每页上的图好像都动了起来。那么，翻动矩阵活动漫画能看到什么呢？

拿矩阵的加法来看。把一个月内每天的销售数量矩阵写在纸上，订住一角，一气翻完这个小册子。看见了什么？可以看到7月份新宿店、池袋店的WEGA、VAIO、PLAY STATION的销售动向。数字的变化生动地展现在眼前，能直观地把握销售趋势。这就是使用矩阵的优点。



3……改变视角，创造新数字

指数 · 对数

我们经常用到自然对数。可是，对习惯了十进制的我们来说，它一点也不“自然”。了解普通人的这种感受，就应该换一种方法来教自然对数，但是从来没有人尝试过。自然对数是人工创造的数字，它是为了连接普通人生活的十进制世界和逻辑严密的自然数世界而创造出来的。在教自然对数的时候，老师应该先说清楚这一点。



●指数背后隐藏着什么

我在当大学老师的同时，开办了一家个人研究所，所以不得不跟账目打交道。每到这时，我就会觉得阿拉伯数字很讨厌。

请看下面的图。



日本人算账的时候，总是四位四位地数。可是一写到纸上，就三位三位地写，这还真别扭。脑子里是按四位划分，手写出来的却是按三位划分。

先不说这个，阿拉伯数字计算起来非常方便。现在数学这么发达，阿拉伯数字功不可没。但它的不便之处在于位数一多，就不利于直观把握。比如说，能马上反应出100 000 000 000日元是多少钱的一般只有银行职员、证券师之类的人。普通人要从个位开始，“个、十、百、千、万、十万……”一个一个数有多少个0，最后才知道是“1 000亿日元”。

这种情况在日本和欧美都一样。位数一多，数起来就很麻烦，经常

发生错误。怎样简化数字，让它看上去一目了然呢？于是人们发明了指数。在 10 的右上角写一个小数字表示 0 的个数，1 000 亿就表示为 10^{11}。

指数的优点在于：

- 看上去一目了然。
- 能方便地比较数字的大小。

例如，比起

$$100\,000\,000\,000$$

来，

$$10^{11}$$

毫无疑问写起来要简单得多。要比较 10 000 000 000 和 100 000 000 000 的大小，写成

$$10^{10} \qquad 10^{11}$$

以后，谁大谁小就一目了然了。

以上讲的内容很多书上都有。但是关于指数，还有一些真正重要的东西在别的书上找不到。这就是在指数这种表现方式里，隐藏着观察数字的独特视角。

●把大数字变成小数字

请看下面的算式。

$$
\begin{aligned}
&100\,000\,000\,000\\
&=10\times10\times10\times10\times10\times10\times10\times10\times10\times10\times10\\
&=10^{11}
\end{aligned}
$$

看了这个算式，觉得“理所当然，没有什么特别之处”的人，都是中了数学的毒的人，可以说病得不轻。把 10^{11} 看成乘法算式的展开，就不可能理解指数的本质。

请仔细想想。为什么是 $10\times10\times10\times\cdots\cdots$ 呢？看起来很平常，但是指数这种表现方式的核心就隐藏在这里面。

这个算式没有把 100 000 000 000 看成是一个数，而是把它看做“很多个 10 相乘”。

那么，为什么要做 $10\times10\times10\times\cdots\cdots$ 呢？那是因为把 100 000 000 000 看做很多个 10 相乘后，才有了指数。

换句话说，把 100 000 000 000 看成是 $10\times10\times10\times\cdots\cdots$ 不是必然的，但却是必需的。

于是，数学上把这些相乘的 10 叫做底数。

为什么底数是 10 呢？这也没有什么特别的理由，就是因为人们已经习惯了十进制。为什么人们习惯十进制呢？是因为人类的手指头有 10 根。我们数数的时候，常常掰着指头数。一句话，把 10 叫做底数，只是因为方便。其实换成 2、3，或是 11 都无所谓。

为了便于说明，我们刚才一直在拿 100 000 000 000 这种能被 10 整除的数字来举例。其实，不论什么数字，都可以用指数表示。

也就是说，所有的数字都可以看做是 10 的乘积。

人们掰着手指头数数，就产生了十进制。也就是说，如果是猪来数数，就可能是四进制；鸭子来数数，就可能是二进制。如果火星人的手有6根手指，那么他们的数学可能就是十二进制。

可是人类还不满足，甚至抬出了太阳和月亮，创造出了七进制（一周）和三十进制（一个月）。听说古代巴比伦还有六十进制。占卜和占星术使用九进制。计算机使用二进制和十六进制。有些人可能觉得讨论这个话题很傻，但数字的数法却是数学的基础。

为什么要用指数来表示数字呢？不用说，这是为了使很长的数字变得简短。

不过，更重要的理由是，把所有的数字都看成是10的乘积，就可以把这个数替换为对数——一种新的、用起来更方便的数。

例如，我们看1 290 856这个数字。把这个数字看成10的乘积，就变成下面这样：

$$1\,290\,856=10\times10\times10\times10\times10\times10\times\cdots\cdots?$$

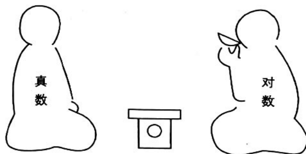
10相乘多少次的乘积是1 290 856

10相乘多少次得到1 290 856？这是一个非常复杂的近似值计算。在这里我们没有工夫来计算这个，告诉大家答案，是6.110 8。

也就是说，10相乘6.110 8次得到1 290 856。10相乘的次数，叫做对数。

对数是“一对一的数字”的意思。刚才的例子中，6.110 8是1 290 856这个真数唯一对应的对数。

真数和对应的对数，就是一起喝酒的老大和他的手下。真数是老大，对数是小喽啰。小喽啰会在关键时刻为老大卖命。对数这个小喽啰，工作得非常卖力。



在数学的世界，我们把它写成下面的形式：

$$\log_{10}1290856=6.1108$$

6.110 8 叫做常用对数。

“常用”乍一听不知道什么意思，其实它就是表示这个对数是“经常使用的对数”。在计算数值的时候，它经常被用到，作用很大。

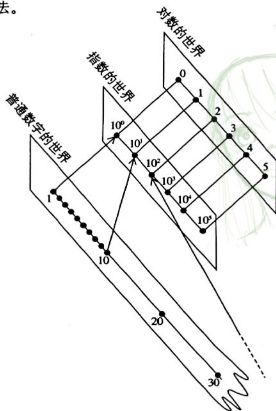
●连接乘法和加法的桥梁

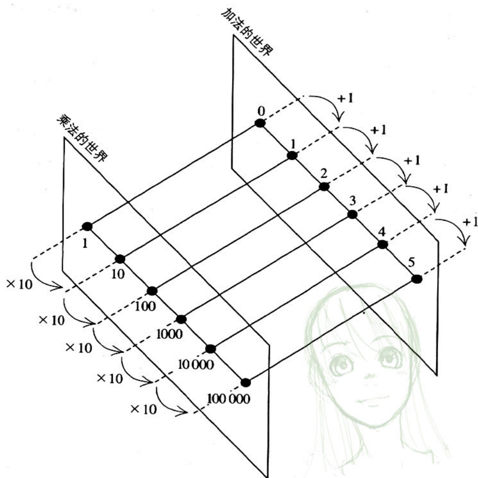
那么，对数使用起来到底有多么方便呢？我们把 100 000 000 000 写成 100 000 000 000，1 290 856 就写成 1 290 856 就行了，有必要特意换算成对数吗？

确实，如果 100 000 000 000 就是 100 000 000 000，1 290 856 就是 1 290 856，那也就没什么麻烦了。

不过，换算成对数后，大数字就变成了小数字，使用起来十分方便。100 000 000 000 和 11，1 290 856 和 6.110 8，哪个计算起来比较方便呢？当然是 11 和 6.110 8。

对数不光有这个好处。比如说，倍乘的数字会像滚雪球一样越滚越大。我们身边有很多这种成倍数变化的现象，如复利式的贷款、细菌的增殖、放射性元素的分裂。在这些现象中，数值会在瞬间变大，光看数值实在看不过来。对数把这些现象中庞大的数值替换成较小的数字，把乘法变成加法。





如上图，把10和10相乘的乘法运算，替换成1和1相加的加法运算，数值就由原来的剧增变成缓慢增长。从这个意义上说，对数是连接“乘法世界”和“加法世界”的桥梁。

数学1·2·3

对数的出现是必然的。用数字来表示庞大的数目，这本身就是人类的一大创举，而发明了对数这种方便的表示方式，更是一个伟大的创造。因为它把烦琐的乘法转换成了简单的加法。

●贷款和 e

对数中，除了常用对数，还有非常重要的自然对数。现在我们来看看自然对数。不过，我们要先从 2.718 28 这个数字的来历开始讲起。

下面我要讲一个虚构的故事，从这个故事中我们来认识自然对数。故事有点悲惨，发生在江户时代。

那是距今约 200 年前的日本宽政年间。有一天，大难降临到江户有名的吴服批发商须山屋。衙门禁止须山屋在 100 天内出售商品，服装由衙门清光，须山屋的财产没收一半。用今天的话来说，就是不正当经营的公司受到停业处分。这在后世被称为宽政改革，是由幕府最高执政官松平定信发起的德川幕政改革的一项内容。幕府对商人们的奢华生活很眼红，须山屋的灾难，是对江户商人的一个警告。

遭殃的是须山屋的主人裕右卫门。仓库里的货物被清光了，财产也被没收了一半，而税金却不能免除。

衙门里的人一个个离开后，规定的 100 天也快到了，店里的伙计都跑光了，只剩下男仆和女佣。即使开始营业，人们也都怕惹祸上身，不敢来店里买东西，根本没有生意可做。须山屋眼看就要倒闭了。

有一天，一个老人掀开门帘走进店里。这是一位和善的老者，看起来像是哪家安享天伦的老太爷，一点都不像客人。裕右卫门问："您有什

么事？”老人笑眯眯地开口说：“你是不是最近手头有点紧？”原来，他是放债的，来看看处于困境的须山屋是否需要借钱。“我不需要借钱，您请回吧。”裕右卫门没好气地回绝。虽然裕右卫门的态度不好，但老人不生气，还是满脸笑容。

这样下去店会倒闭的，裕右卫门心里也不是不担心。但是，即使想进货也没有资金。而且以前货物的付款期也一天天逼近，真是火烧眉毛。“就听听他葫芦里卖的什么药”，老人看上去不像是坏人，裕右卫门决定死马当成活马医，先听听他讲些什么。

老人给出的贷款条件是：年利100%，分12个月计复利，贷款期限是1年。裕右卫门想“真是趁火打劫”。老人见他还在犹豫，开门见山地说：“不用担心。您可是江户第一大富商啊。您这么有头脑，不到半年肯定能还清。而且，您也需要资金来重整旗鼓吧？”

被他说中了，裕右卫门现在确实急需资金。有500两，不，只要有100两，就可以挽救这个店。裕右卫门有这个自信。可是，谁愿意出资给被官府盯上的店呢？找遍江户城也找不出一个人。即使有，也只有站在他面前的高利贷者了。裕右卫门进退两难。

“怎么样？”老人观察着沉思中的裕右卫门，问道。

“到底怎么办？是成是败，要不要赌一把？”裕右卫门心里进行着激烈的斗争。

好，故事先讲到这里。我们来考虑一下故事中讲到的贷款。“贷款和数学有什么关系？”可能有些读者会这样想。关系可大了。自然对数2.718 28就是在借贷关系中被发现的。

那么，令裕右卫门犹豫不决的“年利100%，分12个月计复利，贷款期限是1年”是怎么回事呢？我们先从这个问题开始。现在假设裕右

卫门准备借100两。

如果一年之内一分钱都没还，贷款就会像下面这样增长。

月份	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
贷款	100	108	117	127	138	149	161	175	189	204	221	240	260

过了一年，贷款就变成原来的2.6倍了。这种增长速度真恐怖，260两在今天就相当于5200万日元。

贷款增长这么快，是因为用复利来计算。复利是将利息计入本金再计利息的借贷方式。须裕右卫门的贷款按每月计算利息，每月产生的利息计入当月的本金（本金+利息），成为下月的本金，再计算利息。

也就是说，先把年利100%分配到贷款期1年（12个月）中的每个月，就是每月复利$\frac{1}{12}\approx 0.083$，计算如下：

本金　　100两

1个月后　　本金100两+利息（100×0.083）两≈108两

2个月后　　本金108两+利息（108×0.083）两≈117两

3个月后　　本金117两+利息（117×0.083）两≈127两

……

12个月后　　本金240两+利息（240×0.083）两≈260两

这样，不光是最初的本金100两会产生利息，利息也会产生利息，因

数学1·2·3

1两是指货币里的含金量为1两，换算成现在的货币，约为20万日元，折合人民币约1.3万元。

此叫做“复利”。如果是利息不计入本金的“单利”，1 年后只需还 200 两。现在的银行、高利贷等进行融资时也经常使用复利。

不过，用数学的思维来思考，就应该把问题一般化。在以上的事例中，如果把计入利息次数设为n会怎么样呢？在这里，我们暂且不深入讨论怎样一般化，只把公式写出来。

复利计算公式：$S=P\left(1+\frac{k}{n}\right)^{n}$ ……①

S：合计金额　P：本金　k：年利　n：利息的计入次数

请大家暂且囫囵吞枣，记住这是一个“公式”。重要的是下面要讲到的 2.718 28 是怎么产生的。请大家耐心读下去。

根据裕右卫门的实际情况，P=100，k=1，n=12。套入公式，就是

$$S=100\times\left(1+\frac{1}{12}\right)^{12}\approx 260\text{（两）}$$

数学1·2·3

江户时代的高利贷，就是我们现代的个人贷款（以工薪族为主要对象的高利贷）、工商业贷款等。民间贷款的利息是年利 25%～29.2%。可以分期付款或延后付款的信用卡和可以享受商场打折优惠的信用卡贷款利息大致相同。银行信用卡的年利是 20%（次月一起还清）。

在这个利息超低的时代，日本银行普通存款的利息只有0.02%，相比之下，以上都是不折不扣的高利贷。最近，一些钻法律空子的每日贷款和完全非法的黑市贷款迅速增多，再加上日本经济持续低迷，令受害者日益增多。特别是黑市贷款，利息达到了“10 天 10%，年利 365%”，最近更加严重，“10 天 40%，年利 1460%”，甚至是“1 天 10%，年利 3650%”，手段之恶劣，令人难以想象。

得出了一年后的还款总额。

请大家注意n的值，也就是利息的计入次数。裕右卫门的故事中，约定n=12。如果不是12，是别的数字，那么一年后的还款总额是多少呢？我们分别看看n为6次、8次、12次、16次时的利息及还款总额情况。

n	复利	还款总额
n=6	$\frac{1}{6}\approx 0.167$	253两
n=8	$\frac{1}{8}\approx 0.125$	257两
n=12	$\frac{1}{12}\approx 0.083$	260两
n=16	$\frac{1}{16}\approx 0.063$	263两

利息计入的次数增多，贷款总额也会增多。计入次数为6次和16次时，一年后贷款总额相差约10两。也就是说，从高利贷者的角度来看，提高年利率的同时增加利息的计入次数，也会带来更多财富。

贪心不足的高利贷者们想："尽可能借出更多钱，当然能赚回更多，不过要最有效率地赚利息，应该把利息计入次数定为多少次呢？"假设本金为100两，年利为100%，计入次数为n，看看能得出什么结果。首先，刚才的公式①可以写成下面这样：

$$S=100\times(1+\frac{1}{n})^n$$

这个算式中数值会发生变化的是▒阴影部分。把这一部分挑出来，

像信用卡贷款中常见的那样，把n替换成1、2、4、8、16、32、64、128……把阴影部分的变化情况列成表(用电脑可以很方便地算出来)。

n	1	2	4	8	16	32
	2.000 0	2.250 0	2.441 4	2.565 7	2.637 9	2.677 0

n	64	128	512	1024	2048	4096
	2.697 3	2.707 7	2.715 6	2.717 0	2.717 6	2.718 0

列出表后，我们只要用本金乘以表中的数值，就可以得出对应的还款总额，这种表叫做复利表。

那么，看着这些数字，你发现了什么？请大家注意阴影部分数值的增长趋势。利息计入次数n越大，阴影部分数值的增长就越缓慢。而且，数值最终稳定在2.7……左右。

想必大家已经明白了，这个数字就是e。

人类使用货币的历史很长。复利计算在公元前的印度就已经被广泛应用了。随着货币经济和数学的发展，15世纪时，$S=(1+\frac{k}{n})^n$就已经成为公式固定下来。欧洲商人身边总是带着复利表。人们在贷款、做生意的过程中，发现2.7……这个数字似乎有一种特殊的意义。

●使用e很方便

现在用e这个特殊符号来代表2.718 28。人们发现2.7……这个数字

似乎有一种特殊的意义时，正好物理学上也发现自然界的种种现象中也含有2.7……这个数字。因为2.7……这个数字出现得太频繁，所以人们决定“特殊对待”这个数字。

说到特殊对待，人们对10这个数字也另眼相看。还是拿100 000 000 000这个数字来说吧。前面提到过，把10看做所有数字的底数，

$$100\,000\,000\,000 = \underbrace{10\times 10\times 10\times 10\times 10\times 10\times 10\times 10\times 10\times 10\times 10}_{\text{底数 10 相乘 11 次}}$$

真数100 000 000 000可以用常用对数来表示。

$$\log_{10}100000000000=11$$

刚才我们说过，观察自然现象和人类活动可以发现，e=2.718 28这个数字经常出现。于是，我们把e作为底数，

$$100\,000\,000\,000 = \underbrace{e\times \cdots\cdots}_{\text{底数 e 相乘 25.328 次}}$$

于是有人想到，100 000 000 000 可以写成

$$\log_e 100000000000=25.328$$

这就是自然对数。

在分析自然现象时，使用自然对数非常方便。因此，它才被叫做“自然”对数。戴上这顶大帽子，这个数字俨然成了万物真理的化身。其实不然，人们是为了自己方便，顺手制造出自然对数的。

数学 1·2·3

$\log_e$……常写成 ln……。ln 是取 natural logarithm 的首字母创造出来的数学符号。常用对数在英语中叫做 common logarithm，但是不能用 lc……代替 $\log_{10}$……。



4……把复杂的问题变简单

虚数、复数

为了写这本书我曾开过私塾，亲自给学生授课。在课堂上，学生曾尖锐地问我："老师，虚数这东西真的存在吗？我怎么觉得它像幽灵一样，是捏造出来的，我们到底应不应该相信？"我只能回答："这不好说。我只知道有了虚数很方便，就不用追究它到底存不存在了吧。"不过，对自己不愿意见到的东西，人们就会无视它的存在。人们有可能拒绝承认眼前真实存在的现实，认为"不过是海市蜃楼"。可是，如果是非常向往的东西，即使不存在，人们也会自动制造幻象。这样想的话，就会觉得一切感受与意识都不过是大脑玩的游戏。而我认为，这正是虚数和复数的根本所在。

●为什么要学习这种怪东西

为了写这本书，我看了高中的教科书，令我吃惊的是，高中二年级就在学虚数和复数了。高中二年级的时候，还没有分文理科。这就是说，为数众多的高中生都在学虚数和复数。

关于虚数和复数，我认为这种稀奇古怪的东西，只让理科的学生学就可以了。只有进了理工科大学学习物理和工程学的人，才能真正了解学习复数的意义和作用。不上大学的人和学文科的人，可能今生今世也不会用到复数。

那么，为什么高中生要学虚数和复数呢？因为有些顽固的人认为，不管将来是学文科还是理科，高中生都必须学虚数和复数。

这些老师是为了让高中生为以后进理工科大学打好基础。同时，他们也有自己小小的私心，希望全世界的人都了解自己的专业。

如果你手边有教科书，请翻到写有编者名字的那一页。仔细看看就会发现，其中有很多人是大学教授。教科书里处处隐藏着这些教授们的良苦用心。

升入大学学习工科和理科的学生，会在入学一年后开始学习复函数。但是，这些理工科的大学生忙于实验和学习其他的东西，进入大学以后

数学1·2·3

给高中生授课的是高中老师，本该由每日奋斗在教学第一线的高中老师们来编教科书，才能写出通俗易懂、适合教学的教科书。我曾经亲临现场，观摩过日本许多学校的课堂，授课质量好、学生素质高的学校里，老师们都很注重授课的方式和技巧。

根本没空从基础开始学习复数。于是，理工科的大学教授们从高中时就给学生灌输复数的基础知识。这些教授真是任性，平白无故给大家增添了许多负担。

虚数和复数的概念确实十分重要，可以说没有它们就没有现代科学。所以，学理科的高中生，应该在高中时就为大学的学习打好基础。即使学的时候觉得讨厌，但以后还要全面学习，所以先打个基础也不是坏事。进入大学之后，还会庆幸当时学得早。但是，对于一辈子都不会用到虚数和复数的文科生来说，是被理科生连累了，理工科教授的好意真是消受不起。

复数是由实数衍生出的全新的数的概念。关于复数，学文科的高中生只要了解这一点就够了。强迫将来不会用到复数的人学习复数，真是说不过去。如果一定要让高中生学习复数的基础知识，可以在高三的时候学。忽视学生感受的课程安排，只会让学生越来越讨厌数学。教育者们应该意识到这一点。

话虽如此，现在的应试教育体制还在命令学生“拼命学”。即使不合理，文科的高中生也必须学习复数，升学也会考到复数，偷懒不学就可能考不上大学，反正必须得学。老师应该先告诉学生，为什么要学这种怪东西，让他们学起来更加容易，这才显得通情达理。

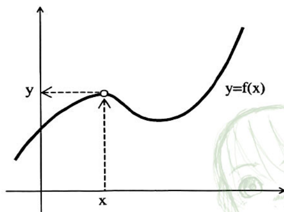
●合二为一

既然复数是因为“理科人的私心”才被纳入高中数学的，因此，想知道为什么要学习它，必须先知道理工科大学教授的想法。对于学文科的高中生我深表同情，不过下面还是要简单介绍一下大学数学。

前面说过，理工科的大学生会在大学二年级左右学习复函数论这门

课（各个大学可能各有不同）。他们必须在半年内掌握这门课。因为这对理科的学生，特别是物理、工程学专业的学生来说，是必不可少的基础知识。

从“复函数论”这个名字就可以想象到，这个概念是由“复数”和“函数”这两个概念组成的。说到函数，我们最熟悉的是一元函数y=f(x)。一元函数中，变量x变化，y也相应发生变化，x和y是一一对应的关系。



但是在实际中，与其把一元函数理解成两个变量的一一对应关系，不如把两个变量合二为一，这样理解起来比较简单。

40多年来，我一直在大学从事机械工程学的教学和研究，以我的经验，在理解下面这类问题时，把两个变量合二为一的思考方式很有效。

1.几何学的问题。

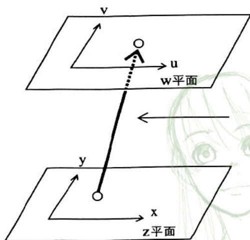
把平面坐标上的点（x，y）看做是由x和y这组数决定的。

2.电路、流体、热、震动的问题。

电位分布和电流、压力分布和流速、温度分布和热、振幅和相位这些变量，都可以看做是由两个数组成一组来决定的。这样，两个变量合为一组，产生的新数就是复数。

因此可以说，复函数表示的是一个复数和另一个复数的相互联系。

说清楚点，因为复数是由两个量决定的，所以复函数表示的是两个量和另外两个量之间的对应关系。用图表示如下：



这种对应关系就是复函数。具体怎么对应，我们先不探讨。

大学教授想教的，就是复数的这种对应关系。但是，学习复函数论这门课的时间只有半年。时间有限，没空去教复数的基础知识。因此，对大学教授来说，必须让学生在高中就掌握复数的基础知识。

教科书的编写者很了解大学教授的这种需要。在大学忽然让学生接

受复数有困难，他们为大学教授着想，所以决定在高中时就向学生灌输复数的基本知识。

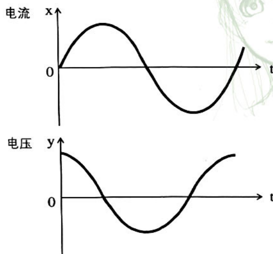
高中学的复数，说得好听点是为大学打基础，实际上是为大学的学习提前打个预防针，免得学生在大学遇到复数时不知所措。

●复数的好处

听了刚才的分析，文科生也许会勃然大怒："凭什么我们要忍受理科生的自私！"不过，如果因此就对复数敬而远之就有点可惜了。复数从根本上改变了人们看世界的方式。了解这一点，就会觉得学习复数很有趣，复数也不再是"怪物"了。

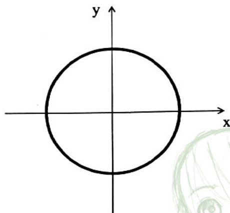
大学的电气工程专业有一门课叫"电气数学"。对学电气工程的学生来说，复数十分重要，与其说一定会用到复数，不如说没有复数就没有这门学科。

例如，如下图所示，电路中时间t和电流x、电压y的变化关系。



之所以发明复数这种全新的数，是因为人们想用一个数表现一个现象。在上面电路的例子中，没有把电流和电压分开处理，而是把它们看做同一个电路的相关部分，于是干脆把两个数字合二为一了。

这里我不再啰啰唆唆列出运算过程。总之，根据这种思考方式，由上图中的两条曲线，得出了下面这个圆。



具体怎么会得到这个圆，我们暂且跳过。在这里我们可以看出，复数的优点就在于把复杂的现象简单化。

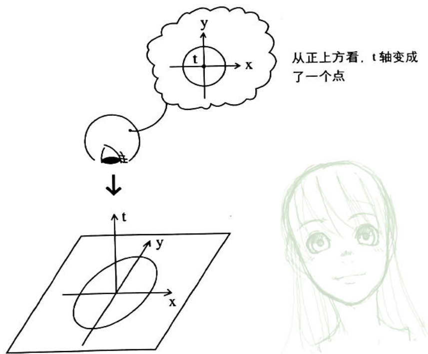
不过，复数的优点还不止如此。

复数尝试着换个角度看问题。一般认为，电流 x 和电压 y 扯不上关系。电流不会影响电压，电压也不会影响电流。但它们又都是同一个电路的现象，是同一电路的不同侧面。

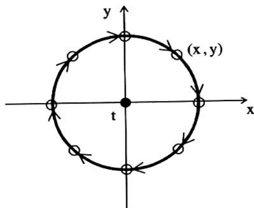
电流和电压有一个共同点，那就是“随着时间 t 变化而变化”。复数 z 这个全新的数，就是抓住了这个共同点，把看起来毫无联系的电流 x 和

电压 y 合二为一，用圆周上的一点（x，y）来表示。

请大家再看一遍前面的圆。图中最引人注意的是没有时间轴。说“没有时间轴”，可能有人会以为时间轴消失了，其实不是。因为我们是从 x 轴和 y 轴组成的平面正上方看，所以看到的不是“轴”，而是“点”。

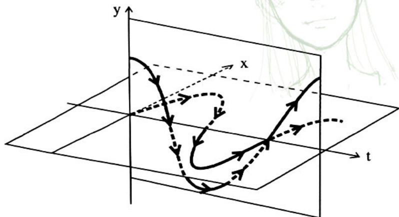


也就是说，使用复数 z 这个全新的数，就不用再考虑时间要素。不过，请大家不要误解，消失的是时间轴，不是时间。电流 x 与电压 y 随着时间变化这一点并没有改变。为了证明这一点，在刚才的图上标示出时间变化，圆周上的一点（x，y）会随着时间的变化转圈。



这个转变真让人吃惊。

我们通常考虑的是 x 与 y 之间一一对应的关系，也就是一元函数 y=f(x)。要表现现象随着时间的变化而变化，就让时间轴 t 穿过 x 与 y 组成的平面，形成三维空间，如下图。



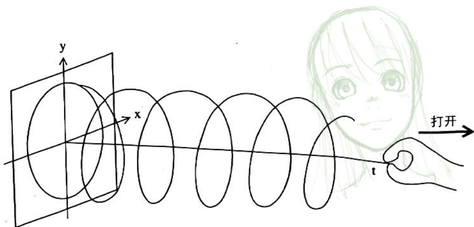
但是，没有必要用这种难懂的方式来表现。

导入全新的复数 z 之后，时间轴压缩为原点，意想不到的新图出现在眼前。换句话说，就是不再按照一般的思路加上时间转变成三维空间图，而是用全新的图来表示。

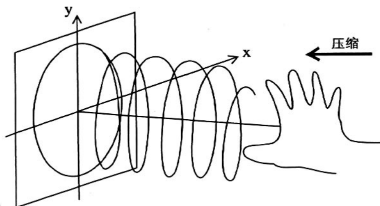
可能有些读者不能理解“时间轴不见了”。下面我再进一步说明。我想说的是，复数是一种压缩的软件。

要理解“压缩”，请大家试着想象一个与它相反的词“还原”。干瘪的乌贼不能还原成活生生的乌贼，复数 z 却可以还原为两个独立的物理量 x 与 y。

如下图，时间轴压缩为一个点，我们再把它拉开。这样，绕着时间轴旋转的圈出现了。

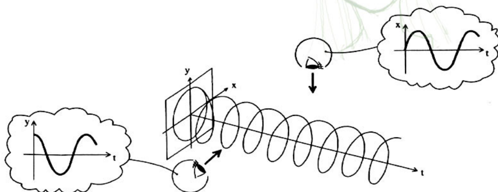


请看下图。x，y平面上的圆，是由不停旋转的圆圈压缩而成的。



所谓“压缩”，就是导入了复数z。

不过，请注意，上图和一般的三维空间图很不一样。虽然也是x，y，t构成的三维空间图。但是，最开始的两条曲线不见了。曲线去哪儿了？其实这两个图表示的东西完全一样。换个角度看线圈，就能看见两条曲线。



●虚数不是幽灵

用过一次复数后就再也舍不得放手，虚数用起来就是这么方便。现在我们试着推想一下这个了不起的工具是怎么被发明出来的。复数的发明者是18世纪欧洲的大数学家高斯。

在这之前，先回忆一下教科书上是怎么解释虚数和复数的。教科书上这样写着：

> **满足一元二次方程式 $x^2=-1$ 的实数实际上不存在。于是我们用 i 来表示这个平方后为 −1 的数字。i 叫做虚数单位。实数 a，b 和虚数单位 i 组成的数字 a+bi 叫做复数。a 叫做复数的实部，b 叫做复数的虚部。**

这个解释中令人费解的是，为什么要去解方程 $x^2=-1$ 呢？一般来说，这个方程式是不可解的。我们自然而然地就会认为没有必要去考虑不可解的方程式。

但是，教科书的编写者们完全没有意识到读者会有这样天真的疑问，他们完全没有想过读教科书的高中生会怎么想。他们按照数学家的思路去思考问题，因此才能若无其事地写下来常人看来异想天开的话。于是数学书看起来就像天书，让人忍不住要对他们大吼一声：“多少也要配合一下读者吧！”

牢骚先发到这里。思考常人看起来无解的问题是数学的宿命。

最早开始认真思考方程式 $x^2=-1$ 的，是17世纪的意大利学者。他们不希望存在无解的方程式。于是，创造出一个无法确认是否存在的数字，

讨论是不是有了这个数字，问题就能解决。他们创造出来的这个数，就是虚数 i。

虚数是一个想象出来的数字，它寄托了数学家们的愿望——有了这个数字，一切问题就能迎刃而解。

听了这些，也许有人会想，数学原来是骗人的啊。说骗人可能有点过分，但是像这种随心所欲的创造在数学中确实存在。不过，虽说是随心所欲，但只要能够成立，数学就承认它。

人们常说“数学是理论的世界”，即使是天马行空的奇想，只要能自圆其说，数学就会承认。

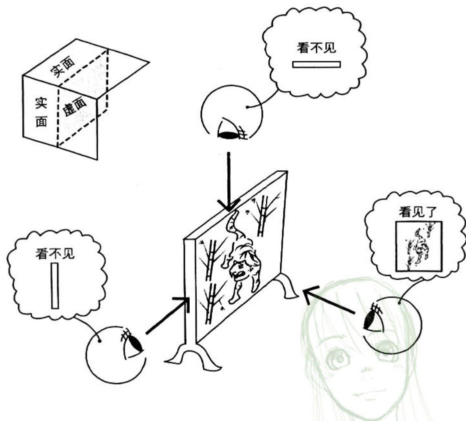
上升到哲学高度讨论这个凭空创造出来的虚数i，是法国哲学家笛卡儿。他给这个数起了个名字叫 Imaginary Number，并思考这个数的存在性。我们使用的“虚数”这个名字，就是从这里翻译过来的。

可是，译成“虚数”后，很多人就因为这个名字觉得虚数是“幽灵一样的数”。

看到“虚”字，现代人就会想到“撒谎”、“骗人”等，带着偏见来理解它，这其实是极大的误解。只有排除这种偏见的影响，不带主观色彩，虚心钻研，才能了解虚数是什么。

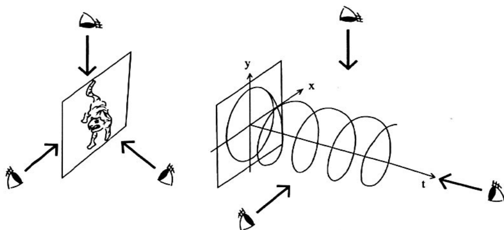
想理解虚数，就不能认为看不见的就等于无。请看下面的图。一扇屏风上画着一只老虎。可是，从屏风正上方垂直或是从侧面看，都看不见老虎。

我们把从屏风正上方垂直看和从侧面看到的面叫做“实面”，从屏风正前方看到的面叫做“虚面”。



虚数就如同屏风上的老虎。从现象的“虚面”看就能看到虚数。不能认为看不见就等于无，因为你没有发现现象的“虚面”，所以看不见虚数。这样想，就能发现虚数。虚数真是奇妙的数。

不好意思，讨论到这里变得有点像参禅悟道了。现在，如果你能联想到刚才有线圈的图，那你真是感觉敏锐。我们比较一下屏风的图和线圈的图。



请大家注意，这两个图中的视角是一样的。线圈的图中，从正上方垂直看和从侧面看，只看到两条曲线，这对我们理解现象没有任何帮助，因为只看到了现象的“实面”。

前面已经说过，看不见不等于无。现象既有“实面”，也有“虚面”。两个面都看，才能有意外的发现。正是因为看了虚面，才能发现圆。改变视角，寻找现象的“虚面”，从线圈的正前方看，才能发现它新的一面。

这里还想补充的一点是，“虚面”是由虚数i支配的面。因为导入了复数，才能看到这个面。由此可以看出，复数z和虚数i之间似乎有什么关联。后面我们再具体论述。

Imaginary Number 直译是“想象的数”。有人也许会质疑：“为什么不干脆译成想数呢？”说这种话说明你没有真正理解译名的含义。

明治时代的人译为“虚数”，是因为他们头脑里浮现出的是刚才的屏风图中的画面。

他们认为Imaginary Number是一般情况下看不见的数字，因此译为“虚数”。他们领悟了这个概念的本质，那就是：要有虚心的态度，从各个方面思考，才能看到虚数。不理解先人虚心求知的精神，武断地认为“虚数这个名字取得不好”的现代人，应该好好反省一下。

数学1·2·3

其实我一开始也对这个名字有意见！

虚数就是这样出现的。我们先讲到这里，下面来看复数。在教科书上，虚数出现以后，复数紧跟着就出现了，给人造成了一种错觉。其实，从虚数并不能自动导出复数的概念。

从历史上来看，从虚数的产生到复数出现，中间隔了200多年。在那200年间，虚数i虽然也可以使用，但不登大雅之堂。有很多数学家称虚数为“不可能的数”、“诡辩量”，对它的存在持有异议。因此，很多数学家都避免使用虚数。

那么，复数这个概念是怎样产生的呢？它的产生是个意外，与虚数完全没有关系。虚数和复数出身不同。下面来看看它们是哪里不同。欢迎进入本章的正题，我们来探讨一下高斯的脑子里是怎么想的。

●窥探高斯脑子里的想法

复数的产生完全是意外。高斯研究的是比他早100多年的数学家费马提出的平方数的问题：**形如4n + 1的质数能够唯一地表示为两个平方数之和。**

高斯当时正准备出版《算术研究》这本书，建立自己的数论体系，却

在无意中发掘到了复数这个大宝藏。

一般用 p 代表“4n+1”，a^2、b^2 表示两个平方数。那就是

$$P=a^2+b^2$$

高斯当时思考的是关于整数的问题。刚开始研究这个定理的时候，完全没有复数这个概念。

可是，仔细看这个公式，高斯发现可以改写成下面这样：

$$P=(a+bi)(a-bi) \quad (不过\ i^2=-1)$$

他灵机一动，用上了200年来数学家们避之唯恐不及的虚数。

下面就难办了。高斯使用的是因式分解，这样一来质数 p 就不是质数了。

为什么呢？因为质数只有1和它自身两个因数。高斯这样写以后，a+bi 和 a-bi 都成为质数 p 的因数了。高斯使用了以前被视为禁忌的虚数 i，因此意外地发现了数的概念的破绽。

数学1·2·3

我们来看看费马的平方数问题。为了方便解释，我们选能用4n+1表示的最小的质数，即 n=3 时，这个质数就是13。

$13=4+9=2^2+3^2$

果然分解成了两个平方的和。费马说：“可以肯定只有一对符合条件的平方数。但是否‘唯一’，连我也不知道。”

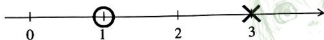
对这个破绽不能置之不理。要改变流传至今的数的概念，就要弥补这个破绽。

于是高斯提出，应该把a+bi和a-bi也看成是实在的数。他认为这个新数z是由a和b两个数字决定的，所以取了个名字叫Complex Number。

我们所知道的数字一般可以确定为数轴上的一点。数字在我们的生活中太常见了，以至于我们没有意识到这意味着什么，其实这一性质对数字来说至关重要。每个数字都在数轴上有一个对应的点。

可是，高斯提出的a+bi、a-bi在数轴上就没有对应的点，真是另类的数。

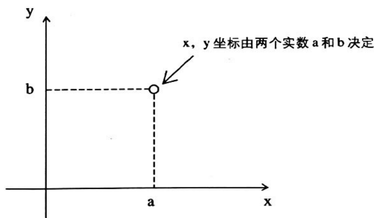
比如说，a=1，b=3时，这个数就是1+3i。这个数在数轴上怎么表示呢？很明显在数轴上找不出一点可以表示它。一定要在数轴上表示这个数，那就只好把a记做○，b记做×。



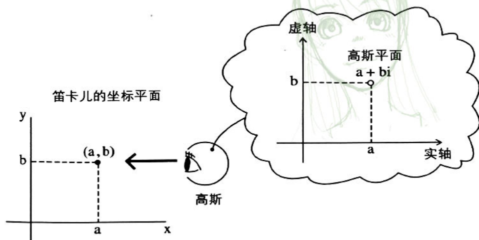
但是，用两点来表示一个数实在很奇怪。于是，高斯开始思索。我们经常说"转变思路"，高斯所做的可以说是"转变理解"。

他是这样想的：

"新的数z=a+bi，是由两个实数a、b决定的。由两个数字的组合决定一个量，这一点跟笛卡儿的坐标平面倒是相通的。"



既然如此，高斯就开始尝试借用笛卡儿的坐标平面。他想：“笛卡儿用坐标（a，b）来表示坐标平面上的各点，既然z也是由a和b决定的，那也可以用平面来表示。”于是，笛卡儿的坐标平面在高斯眼里就变成了这样。



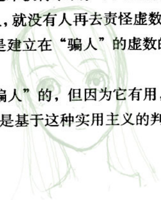
经过小小的改动，笛卡儿的坐标平面中的x轴、y轴的意义变了。也就是说，变成了：

x轴 → 表示a+b中a的轴 → 实轴

y轴 → 表示a+b中b的轴 → 虚轴

高斯的灵活理解真令人惊叹不已。为了表示复数，他赋予了笛卡儿坐标平面全新的含义。为了表示对高斯的敬意，我们现在把这个全新的平面叫做“高斯平面”。对此后复数的发展来说，高斯这个“理解的转变”可以说是惊天动地的一大变革。

从历史上看，高斯创造复数时，虚数还未获得承认。不久之后，复函数的概念得到完善，其用处获得广泛承认，就没有人再去责怪虚数“骗人”了。因为被证明非常有用的复数，正是建立在“骗人”的虚数的基础之上的。



因此，考虑到实用性，即使虚数是“骗人”的，但因为它有用，最终也获得了大家的承认。虚数获得承认，正是基于这种实用主义的判断。

5……日常生活中隐藏着本质

微分 · 积分

有些人赚得多花得也多，有些人赚得少花得也少。哪种人会成为富翁呢？当然是后者。俗话说“锱铢必较”，要成为富翁，最好的办法就是精打细算。这是古今中外放之四海皆准的真理。也就是说，积少总会成多。这就是微分与积分的本质。



●运用生活感觉

首先，我们从微分和积分是什么说起。

如果问一下声称“不懂数学”的人，到底不懂数学的什么，很多人会回答“不懂数学用语”。他们举出微分、积分做例子，说简直就像是外星人的语言。

我觉得这种感受很正常，很合乎情理。因为数学的世界和日常生活的现实世界本来就是两个世界。

数学证明题中常出现的逻辑严密的“因为”、“所以”，以及日常生活中很少听到的“微分”与“积分”，这些专业用语构成了数学的世界。一般人不可能轻易理解数学世界。从一开始就能理解数学世界的人都是天才。

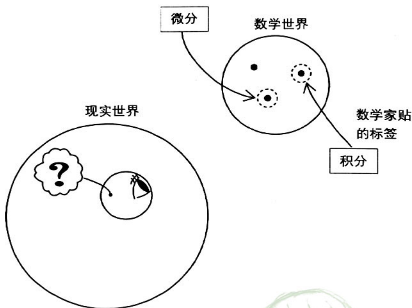
那么，为什么会不懂数学用语呢？

数学用语其实是给某个概念贴上的标签，贴上标签以后，我们才能理解概念。所以，“不理解数学用语”，其实就是因为数学世界的概念离现实生活太远，没办法给它贴对应的标签。

微分、积分等用语，是发明这些概念的数学家给概念贴上的标签。对数学家来说，发明了这些概念，就要分别给它们贴上合适的标签，就是这么简单的一回事。

但是，对于我们这些生活在现实世界里的人来说，这简直就是发生在另一个世界的事。

为什么要去理解跟自己完全没有关系的另一个世界里发生的事呢？

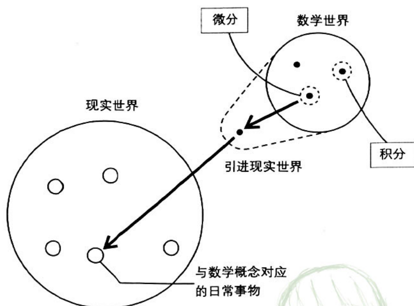


“不懂数学”、“不懂微积分”，就是出于这种对数学世界的抗拒心理。

那怎么办呢？对我们这些生活在现实世界的普通人来说，微分与积分真的是一辈子都用不着的东西吗？

当然不是。我们不能把微分和积分放到数学世界里去理解，而要把它们与日常生活联系起来，以此为契机来理解。

虽说数学的世界是另一个世界，但是，运用日常生活的感觉，可以十分有效地理解微分与积分。



比如，把微分与积分和结算账目结合起来考虑。

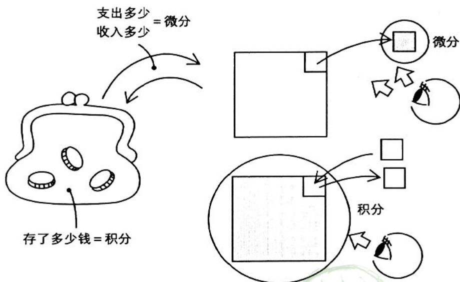
工学院大学三年级的学生猪冢，每月靠父母寄来的生活费和当家庭教师的工资生活。猪冢与别人合租房子，这个月轮到他交房租，花了很多钱，手里只剩下5000日元。

距月底父母寄来生活费和领到工资还有2周。5000日元能撑到月底吗？这是猪冢最关心的问题。

猪冢最关心的是以下两点。

1. 需要支出多少钱？

2. 钱包里还有多少钱？



“收支多少”是微分,“存了多少钱”是积分。

也就是说，随时间变化的某一事物，观察它变化了多少是微分，一共有多少是积分。

乍看上去毫无关联的日常生活中，隐藏着微分与积分的本质。

●将微分一分为二

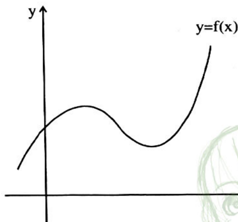
理解了概念的本质，就可以放心地进入数学世界了。

比如说，微分和微商这两个用语。不懂数学的人可能会认为两者是同一个概念，或者认为两者是完全不同的两个概念。这两个概念必须明确区分，但因为它们都跟微分有关，大家的理解就千奇百怪。数学家的

世界里区分明确的概念，在远离数学、生活在现实世界的人们看来，好像都是一回事。这就是一个典型例子。这和东京人认为广岛和冈山离得很近是一个道理（实际上广岛和冈山相距150千米以上）。

首先，我们要正确理解微分和微商的意义。

下面有一条曲线，这条曲线代表y=f（x）这个函数的一个完整周期。

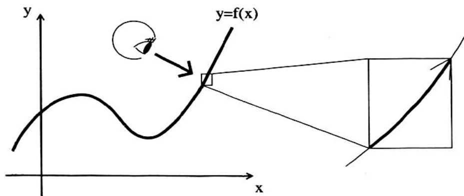




数学1·2·3

所谓函数，是指某一变量x变化时，变量y也随之变化，x和y之间的这种对应关系记做y=f(x)。f(x)是function of x的意思，取其首字母记做f(x)。不过，函数y=f(x)不只是表示单个数字x与y的对应，而是表示连续的对应关系，它表示一条曲线。教科书上只指出了函数是表示x和y的对应关系，我们还必须充分重视这种连续性。

微分研究从曲线 y=f（x）上切割出的一部分曲线，微分就是曲线的一部分。从“微分”这两个汉字就可以看出：微＝小，分＝部分。

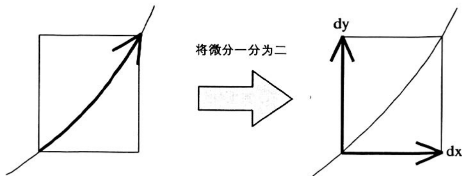


那么，究竟是怎么研究“曲线的一部分”呢？前面讲到过，函数 y=f（x）表示的是：

1. **变量 x 和变量 y 的对应关系。**
2. **一条曲线。**

也就是说，曲线的一个完整周期可以表示 x 和 y 的关系。

这对“曲线的一部分”也就是微分来说，同样适用。所以，所谓“研究曲线的一部分”，就是将微分分为构成它的两个成分——x 成分 dx，y 成分 dy。



像这样，把微分分为构成它的 x 成分 dx 和 y 成分 dy，探讨两者之间的关系，就产生了新的数——微商 $\frac{dy}{dx}$。使用微商时，dy 和 dx 表示为

$$dy = \left(\frac{dy}{dx}\right) dx$$

dy	$=(\frac{dy}{dx})$	dx
↑	↑	↑
微分的 y 成分	微商	微分的 x 成分

可以看出，微商 $\frac{dy}{dx}$ 是微分的 y 成分 dy 与 x 成分 dx 的比。

可是，在教科书上，将微商解释为“微商 $\frac{dy}{dx}$ 是 y=f（x）的切线的倾斜度”，这就令人大惑不解了。为什么忽然出现了“切线”呢？我们并没有画过切线啊。

这时候教科书至少应该解释一下：“我们换话题了。”一句交待都没有，忽然冒出一个新东西，好像一切都理所当然，这就是数学家的傲慢之处。

数学1·2·3

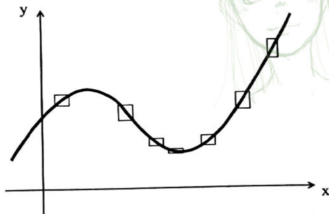
大多数人不假思索就接受了这个解释，认为"微商就是倾斜度"。确实，从数学角度来看，这种说法是正确的。但是，仅仅这样解释，我们还是不明白为什么$\frac{dy}{dx}$叫做微商。

要理解$\frac{dy}{dx}$，必须理解"商"的含义。$\frac{dy}{dx}$是与微分的x成分dx相关的数，所以才叫做微商。说得清楚一点，$\frac{dy}{dx}$是微分dx乘以某个数，得出dy。

反过来说，就是给出微分dx、dy，就构成微商$\frac{dy}{dx}$。

但是，看看下图就知道，即使是长度相同的一段曲线，在函数曲线上的位置也不同，$\frac{dy}{dx}$的值也各不相同。也就是说，$\frac{dy}{dx}$的值随着x值的变化而变化。

因此，与y是关于x的函数一样，$\frac{dy}{dx}$也是关于x的函数。



这样，把$\frac{dy}{dx}$看做是关于x的函数时，$\frac{dy}{dx}$就叫做y=f（x）的导数。是“由函数y=f（x）导出的新的函数”的意思。为了与微商$\frac{dy}{dx}$区分开，有时我们特意把它记做y′。

●积少成多

微分和积分总是形影不离。微分一出现，积分就像个跟踪狂，一定跟在后面。所以，讨论过微分后，我们再看看积分。

跟前面探讨微分一样，我们先搞清楚积分是什么意思。

所谓积分，就是指把微小的部分聚集起来，因此也叫积微分。积微分这个名字可能更加准确，因为积分的“积”表示“聚集”这一动作。

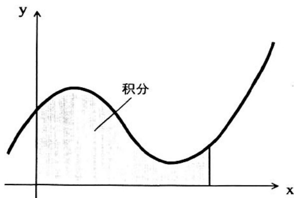
教科书上经常说“求下面的积分”，这里的“积分”是指聚集之后的结果。这是一种误用，把聚集的动作和结果混为一谈，偏离了词语原来的意思，就会弄不清楚“积分”到底是什么意思。这一点必须注意。

下面我们来思考一下积分这个概念。

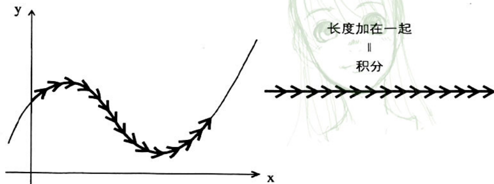
教科书解释“积分是什么”时，常会用下面的图表示，说“积分是曲线下方的面积”。

数学1·2·3

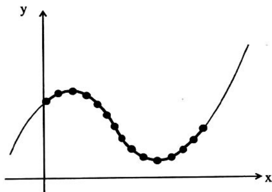
刚才探讨的概念之间的区别都很细微，希望大家注意这些细微的差别。准确地理解语言，意味着正确理解数学概念。忽视语言的差别，混在一起乱用，就无法正确理解数学概念。不解决这个问题，就更加无法正确理解以后要学到的概念（如大学数学会出现的偏微分等）。

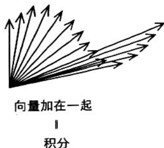


即使不考虑词语的误用，这个解释也不能算正确。积分本来是“聚集微小的部分”这一动作。从它的本意出发，如下图所示，把函数曲线上的各小段曲线合在一起才是积分。



或者，我们把每一小段曲线看做一个向量，把它们合在一起，也叫做积分。





那么，为什么数学上要把“求曲线下方的面积”叫做积分呢？这并没有什么特别的原因，只是因为数学家们给“求曲线下方的面积”贴上了一个标签，就叫它积分。

教科书错就错在突然提出了“积分=曲线下方的面积”，生硬地向学生灌输这个概念。因为编者们认为从积分的本意出发去思考的话，学生会想得太多，反而产生迷惑。但是，如果没有这种思考，就不能真正理解积分。

数学1·2·3

有些书上经常写着〝提炼要点〞之类的话。对这样的书要保持警惕,因为光抓住要点不可能做到真正的理解。人不能光靠输液和吃营养剂生存，也不能光靠要点理解事物。要吸取多方面的知识，才能实实在在地做到理解。

●直观地理解微分

刚才说过，微分是切取函数曲线上的一小段曲线。不过，它脱离整体后就没有什么意义。把微分分解成 x 成分 dx 和 y 成分 dy，并把微分看做是 dx 和 dy 的组合，它才具有意义。

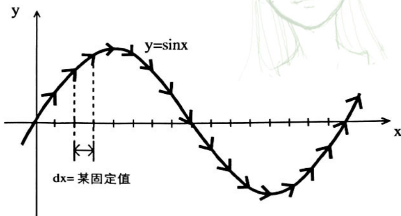
dx 和 dy 的组合有很多：

$$dx+dy \qquad dx \times dy \qquad (dx)^2+(dy)^2 \qquad \frac{dy}{dx}$$

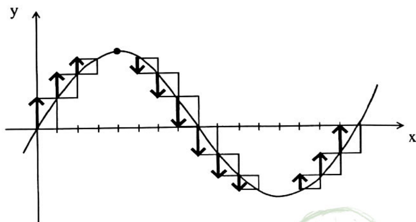
我们来看看其中的$\frac{dy}{dx}$。按照教科书上的一般说法，所谓微分法就是求微商。

我们来用微分法处理函数 y=sinx。按下面①～④的顺序来做。

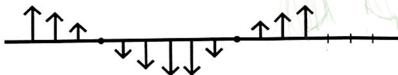
① 画出 y=sinx 的曲线图。将 x 轴等分为 n 个 dx 区间，分割出一段段曲线。



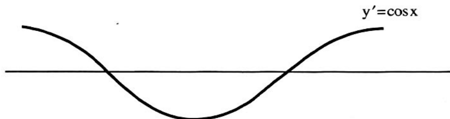
② 把切取的一段曲线（微分）分解成 x 成分 dx 和 y 成分 dy。x 轴是等分的，dx 为固定值。



③ 从上图中只取 dy 的值，排列在 x 轴上。dx 为固定值，我们假设它为 1。微商与 dy 成正比。



④ 把表示dy的值的箭头用线连接起来，就出现了y=cosx的图像（y的值并不准确，我们只看大概的形状）。也就是说，微分y=sinx，就得到y=cosx。



●无法“返祖”

微分与积分中，最难理解的是原函数。打开手边的教科书，在微分和积分之间，有这么一段话。

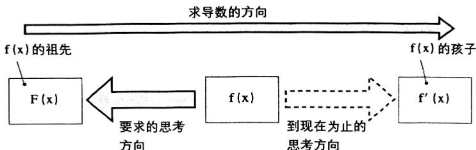
请大家回想一下，这段话是这么说的。

> **微分某函数f(x)，就得到导数f′(x)。同样，给出已知函数f(x)，微分后得到它的那个函数是什么呢？这个函数记做F(x),叫做f(x)的原函数。F(x)微分以后得到f(x)，即：F′(x)=f(x)**

对于以上的说明，读一遍就能懂的人都很了不起。一般人都不知道它在说什么。

为什么这么难懂呢？分析一下，原因可能是这样的。

请看下图。



忽然提出“原函数F(x)”，一下子打断了现在的思路（求导数），变成求另一个问题（求未知函数）了。而且是被突如其来的话打断的。学生不能理解为什么要这样，所以读不懂这段话，跟不上这种突然的思路转变。

教科书的编写者还以为他们循循善诱，加上这段说明可以为学习积分打好基础。效果正好相反，学生疑窦丛生，觉得不明不白就硬塞给他们一个概念。因此，他们就不愿意再学下去。这种教法只会让学生对数学更厌恶。但教科书的编写者们完全没有意识到这一点，真迟钝啊。

这个说明也很狡猾，因为它先说出了结果。f(x) 的祖先——原函数F(x) 在后面讲积分的时候会出现。教科书的编写者知道“求原函数就是

数学1·2·3

达尔文说，人是由猿进化而来的。听了这句话，人们就会想，人和猿确实有很多共同点，这才是正常的思路。原函数其实可以简单地解释为“微分后得到f(x) 的函数”，但是教科书的编写者偏要反着来，“寻找进化为人的生物”，怎么找得到呢？

求积分”。他们为了后面讲解积分时方便，先在这里埋下了伏笔。他们的意图再明显不过了。

对学生来说，这个说明根本就是多余的。

这个说明这么难懂，放在这里根本是画蛇添足。即使有些人能看懂，也没有必要强迫大家都去理解。教科书的编写者没有意识到他们中数学的毒有多深。这样只能满足教科书编写者自己的虚荣心，成为能看懂的人炫耀的资本。我认为，凡是这样的说明都应该干脆置之不理。

●描绘微分和积分的关系

教科书上通常按微分→积分的顺序来介绍微分与积分，在这里，我们反过来，按积分→微分的顺序来看。这样更有真实感，理解起来也更容易。

为什么按积分→微分的顺序比较容易理解呢？回想一下本章开头猪冢的例子就知道了。要靠5000日元撑过2周的猪冢最关心的是“钱包里还剩多少钱”，而不是“支出了多少”。

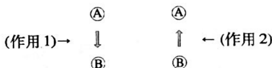
也就是说，我们在生活中，最先注意到的是积分，而不是微分。因此，我认为按积分→微分的顺序来学习微分与积分，更符合人们的思维习惯，更好理解。

微分与积分中重要的一点，是微分与积分互为逆运算。用一个图式来表示两者之间的逆运算关系，就是下图。教科书上也经常出现。

$$\text{（积分）}\ \int dx \ \begin{matrix} f(x) \\ \Downarrow \\ F(x) \end{matrix} \qquad\qquad \begin{matrix} f(x) \\ \Uparrow \\ F(x) \end{matrix}\ \text{（微分）}\ \frac{d}{dx}$$

数学1·2·3

现在，有现象A和B，两者的关系如下。



也就是说，对A施加"作用1"变成B，对B施加"作用2"变成A。数学中称"作用1"为"运算"，"作用2"为"逆运算"。这时"作用1"和"作用2"互为逆运算。如，乘法和除法互为逆运算。



f(x)积分后得到F(x)，F(x)微分后得到f(x)。但是，光用符号表示，无法对逆运算产生直观感觉。那我们就画出它们的逆运算关系。

下面请大家边读下文边对照第100页和101页的图。

① 求曲线下方的面积。

y=f(x)曲线下方的竖线（横向移动的竖线），沿x轴从左向右移动。

数学1·2·3

这种逆运算关系叫做"微分与积分基本定理"，是连接微分和积分的基本概念。教科书让人不满意的是，有那么多关于三角函数的定理、公式，却没有这个最基础的定理。有很多读者都是第一次听说这个定理吧。

求从原点到竖线的曲线下方的面积。面积F(x)随着竖线向右移动而变大。比较面积F(x)的增长方式和竖线的移动，得出下表。

竖线的移动	原点→a	a→b	b→c	c→d
F(x)	快速增大	缓慢增大	快速增大	剧增

② 用图来表示面积值。

在图①的基础上，把面积F(x)的值画成图。这样就得到关于面积的函数y=F(x)的图。

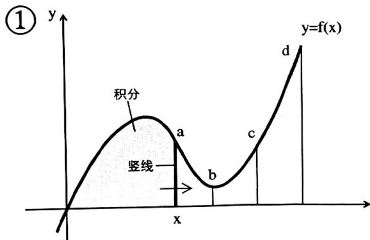
③ 求表示面积的曲线的导数。

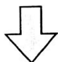
求图②中表示面积的函数y=F(x)曲线上各点的导数。

④ 用图来表示导数。

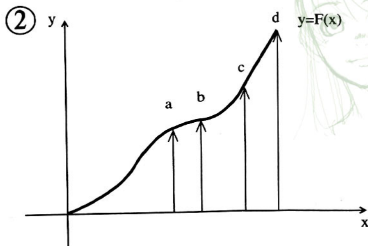
将图③中求得的导数的值用图④来表示。

接下来，仔细观察图④。它跟图①完全相同。也就是说，取图③中关于面积的函数y=F(x)上各点的导数，得到的函数和图①中的y=f(x)相同。换句话说，积分F(x)进行微分后，得到原函数f(x)。

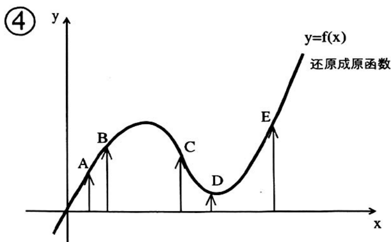


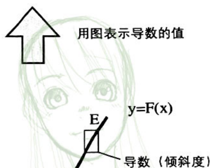


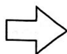
用图表示 F(x) 的值

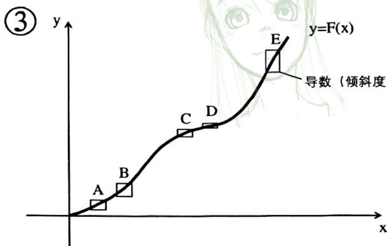





④
y
y=f(x)
还原成原函数
A
B
C
D
E
x


用图表示导数的值




③
y
y=F(x)
E
导数（倾斜度）
C
D
A
B
x

发现微分和积分互为逆运算的，是17世纪的科学家牛顿和莱布尼茨。自古希腊的阿基米德以来，历代科学家，如伽利略、开普勒等一直都在探索怎样“记录运动的微小部分（切线问题）”。他们为了找出答案，发明了人类解释自然现象的有力工具——微分法、积分法。此后，物理学靠微分法、积分法取得了飞跃性的进步。现代数理学科、工程学科以及经济学，离开了微分法与积分法就不能成立。微分和积分的重要性可见一斑。

数学1·2·3

最先发明微积分的是牛顿还是莱布尼茨？这一争论隔着多佛尔海峡，升级为一场诽谤中伤大战，成为欧洲社会的一件大事。实际上牛顿和莱布尼茨是分别发现这一定理的，但当时的人却不这么认为。在发现新知识和新技术时，常常会出现这种争论，现代也常有这样的事。

在技术界，这种争论常常以侵犯专利权的诉讼表现出来。不过，在这种论战中，很难分清谁是新事物的发明者或真理的发现者。因为身处同一时代的人，常会思考同样的事情，有时会出现同时有多个人申请同一发明的专利，牛顿和莱布尼茨的争论就是证明。

6……通过部分看整体

微分方程

人们常常因为好奇心驱使，从墙缝窥视屋里的世界。从前，从围墙的缝隙窥视进去，可以看到女人洗澡的香艳画面。对于偷窥，天下的男人都存在幻想吧。微分方程式就是“偷窥”。现在已经没有人在户外洗澡了，所以再也没有透过墙缝偷窥女人洗澡的事了，但偷窥却以其他的形式存在着。看看施工现场的围墙。近来，施工现场的铁板围墙上开着很多塑料窗，可以窥见施工现场的全貌。从窗口看去，可以看到起重机、推土机在忙忙碌碌。我是摆弄机械的人，看到这种情景，就不禁欢欣雀跃，脑子里想象它们在做什么。我认为，这就是微分方程式的本质所在。

●重要的事要提前交待

本章我们来探讨微分方程式的本质和意义。

提起微分方程，最先想到的是可分离变量。

“微分方程的关键在于能否分离变量”，这是教科书上常见的话。确实如此。但是，我对这个说法却很不满意。倒不是因为这句话说错了，而是因为教科书在后面补充了一句：“注意，微分方程大多不可解。”

也就是说，不论微分方程能否分离变量，大多数都是不可解的。

世上存在无数个微分方程。它们被分为可分离变量的微分方程、齐次微分方程和一阶线性微分方程，这些都是可解的微分方程。更多不可解的微分方程，根本没有这样的分类。

换句话说，教科书只谈到了可解的微分方程。

从教科书上看，好像所有的微分方程都可解，其实并非如此。能解的只是一小部分，大多数都不可解。

但是，为什么会变成这样呢？

这和积分有关。学过微分方程的人应该知道，解微分方程最后都要积分，不论是分部积分还是变量替换积分。总之微分方程式要能积分才能解出来。

问题就在这里。教科书上没有提到有些函数不可积分。

数学1·2·3

我上高中的时候，学校不教微分方程，考试时也没出现。概率、统计倒是学过，不过考试时也没出现。不了解微分方程的用处，教也是白教，学生根本掌握不了。所以，还是我刚才的提议比较中肯。

微分方程能不能解，取决于在最后一步能否积分。可惜的是，大部分不能积分。所以，微分方程大多不可解。

微分方程就是这么麻烦。不过，虽说只有很少的一部分，但有些微分方程还是可解的，这是毋庸置疑的。那么，只看可解的微分方程，会发现什么呢?

我从事工程学研究已有40多年，需要的时候也会用到数学，但几乎没有碰到过教科书上写的微分方程，也没有解过。根据经验，我认为真正会用到的微分方程只有1个。

请大家务必记住，真正会用到的方程只有解为指数函数$y=Ce^{kx}$的微分方程。

其他的全部不必理会。一定要解的话，就边看教科书边解，只要你不想成为大学教授，就不必把烦琐的解法一一记住。

数学1·2·3

这么重要的事项，教科书上一点也没写。学生最头疼的，就是这么重要的东西却从来没有人告诉过自己。

高中老师认为，学生在大学里还会详细学习。而大学教授则认为，高中时肯定已经学过了。双方互相“谦让”，结果漏掉了一个真空地带。

刚才讲的东西只要5分钟就可以讲完。在开始授课时讲一讲，学生会更容易理解，但是就是没有人这么做。我认为，这是因为教书的人没有设身处地为学生着想的缘故。

●学微分方程学什么

我一直在想，数学教学中，还有像微分方程这样“格式化”的教法吗?

我来举例说明什么是格式化。一阶性形微分方程、齐次方程、全微分方程、可分离变量微分方程、伯努利微分方程等，写下去没完没了，这些都是教科书上的用语。

看到这些，我不由想起了英语的语法。比如，英语的虚拟语态。

If I were a bird , I could visit her.

书上出现这个句子的时候，总是解释为虚拟语态。接着，把它一般化，就变成：



If+ 主语 + 动词过去式，主语 + {should / might / would / could} + 动词原形

这就是格式化的一个例子。微分方程的教法同样格式化。

我经常和外国研究者一起工作，但从来没有用过虚拟语态，也没听他们用过。虚拟语态是书面用语，不写文章就用不到。数学也是一样，光记住“格式”，还是不会用。

教科书本着熟能生巧的原则，拼命灌输格式，让学生一遍一遍地重

复计算，好像微分方程就只是计算。用考试这条鞭子赶着学生前进。本来，教科书的目的是让学生先掌握初步的解法。但不知是从什么时候开始使用这种方法，几十年来，这种教学法就没有变过。

可能教的人觉得教学方法无所谓。那是因为他自己已经完全理解了。这种“独善其身”的教法，只能使学生离微分方程的本质越来越远，可教的人根本没有意识到这一点。不信你去问问学生“什么是微分方程”，大多数人都以为，微分方程就是套用公式解已知方程式。回答令人大跌眼镜，这应该完全归咎于拙劣的教学法。我想说的是，老师们能不能多考虑考虑学生的感受，不要绕不必要的弯路，那只会把学生搞得晕头转向。

我有一位朋友，从企业工程师转做大学教师。他现在就在教学生微分与积分。我曾经问他：“工作中是否解过微分方程？”他回答说：“从来没有。”我问：“那为什么要教这些工作中用不到的方程呢？”他说：“因为它的思考方式很重要。”原来，他也认为学生们将来可能根本不会去解微分方程，不过，因为它“很重要”，所以要教。

他的回答可能有些好笑，但却是真的。读者中大概有90%的人，毕业以后永远不会解微分方程。这么说可能会引起误解，但这确实是我在大学执教30年、研究了一辈子工程学的经验之谈。

课堂上，老师说“微分方程广泛应用于科学的各个领域”，这是谎话。

数学1·2·3

我说过，不是所有的微分方程都可解。使出吃奶的劲儿，一路计算下来终于解出来了，那是不幸中的万幸。判断一个微分方程是否可解，本身就是一门学问，叫做微分方程论。

微分方程只用于流体、热、计算物体运动等有限的几个情况。并且，现在也完全没有必要绞尽脑汁地解微分方程。后面我们还会讲到，不管是多么复杂的微分方程，计算机都可以通过数值计算解出来。

这样一来，记住微分方程的解法就没有什么意义了。还不如把心思花在研究用什么样的数值计算法使计算机更容易解出微分方程，这一点要重要得多。

那么，因此就没有必要学微分方程了吗？也不是。我们不用去解微分方程，但要掌握它的思考方式。

●微分方程的精髓

为了理解微分方程的精髓，我们把解微分方程的过程分解为两步。

第一步：立微分方程。

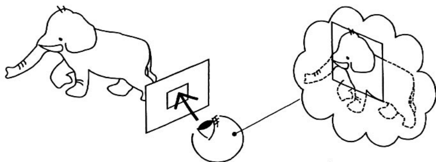
第二步：解微分方程。

刚才说过，第二步可以由计算机代劳，我们不需要亲自来做。但是，不论计算机多么发达，也不能什么都依赖它。

计算机无法进行第一步，也就是立方程式。计算机用的微分方程式，必须先由人类编写成程序，然后输入计算机里。这就是为什么“微分方程的思考方式很重要”的原因。不知道怎么立微分方程，计算机就不能计算。而会立微分方程的只能是人。

那么，“立微分方程”又是怎么一回事呢？

有个成语叫“盲人摸象”，意思是只了解部分不足以理解整体，告诫人们不要片面地看待问题。不过，通过部分想象整体正是立微分方程式的诀窍。

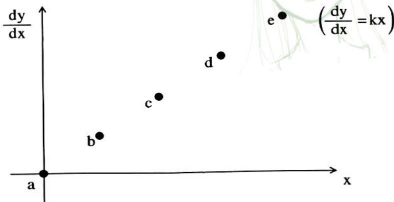


我把这个诀窍画成了图，帮助大家有一个直观的印象。不过，在这之前要先记住这句话：通过部分看整体。

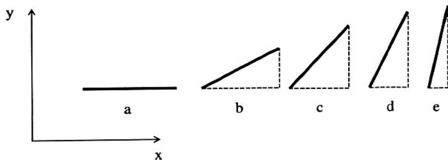
这里所说的“部分”是指微商$\frac{dy}{dx}$，“整体”是指未知函数 y=f（x）。用数学语言来说，微分方程就是看了微商$\frac{dy}{dx}$，就知道 y=f（x）。这是微分方程的基本思考方法。关于微分方程，我们要了解的就是这一点。

记住这一点，然后来看下面的图（为了便于解释，dx 取等值）。

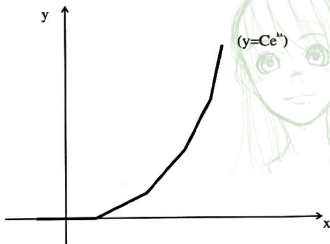
① 计算部分$\frac{dy}{dx}$ 的值，在图上标出（x，$\frac{dy}{dx}$）。$\frac{dy}{dx}$跳跃性增大。



② 把跳跃性增大的$\frac{dy}{dx}$值表示在x，y平面上。分别用倾斜度不同的线段表示$\frac{dy}{dx}$。



③ 将所有线段连在一起，得到曲线y=f(x)。



dx 的值为无限小时，最终得到的曲线如上图。

换句话说，立微分方程，就是观察自然和社会生活中各种现象的细微变化，并据此描绘出现象整体。

●为什么微分方程不能应用

微分方程也是方程，按照一般的想法，当然要去求解。实际上，自从 17 世纪牛顿、莱布尼茨提出微分法与积分法以来，无数人挑战过微分方程式。“导入可分离的变量”等解微分方程的初级技巧，是伟大的先人们殚精竭虑、在实践中积累下来的。

教科书整理了先人们努力的成果，分门别类地介绍了各种形式的微分方程和对应的解法，看起来很方便。

可是，即使掌握了这些技巧，能熟练计算微分方程，也不等于会用微分方程。或者可以说越会计算，离微分方程的本质越远。

事实上，有很多人解了无数微分方程，却从来没有在工作中用到过微分方程。

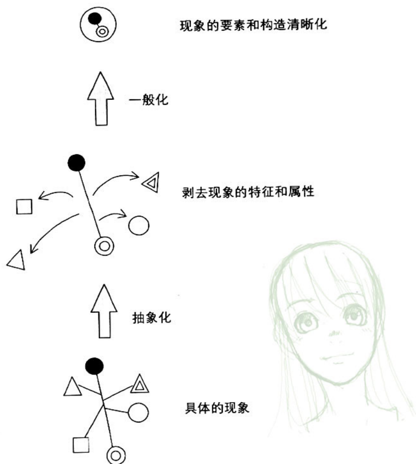
为什么会变成这样呢？这是因为学数学的人，往往会忘记现实的世界，迷失在抽象世界里。

微分方程是用抽象的语言（数学符号）来表现日常生活中的现象，它有以下两个要点：

1. 抽象化。剥去现象的特征和属性的过程。

2. 一般化。抽取构成现象的要素，研究它们之间的结构关系，并找出现象的普遍性的过程。

用图表示如下：

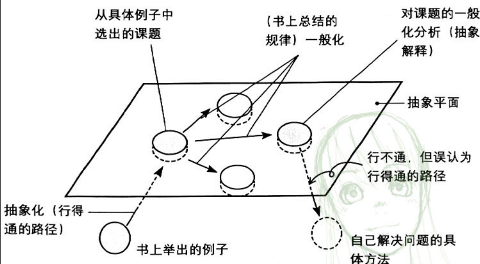


用微分方程来表示日常生活中的现象，并解微分方程，这是从抽象化到一般化的过程。沿着这个方向走下去，会离现实世界越来越远。

而且，这个过程不可逆转。要从抽象世界回到现实世界是极其困难

的，这简直就是一条单行道。“微分方程没法应用”的问题，跟人的思维过程有关。

这使我想起了一件事。有很多公司的经理来找我，说想用我的“失败学”来分析自己的事业，却不知道怎样做。用图表示这些人的烦恼如下：



经理们想直接运用我书里的规律和概念来解决自己的问题。他们以为从现实到抽象的思考过程可以逆转。这是误会的根源，思考过程是不可逆的。

我所创的“失败学”，首先从现实中发生的很多失败事例出发，提炼

造成失败的要因，观察它们的构造，然后将失败抽象化为要因和构造。这样，不同的失败都可以归结为相同的构造和要因，也就是把失败一般化了。同时，在这个过程中，总结出各种各样的规律和概念，如：

- 怎样理解失败。
- 怎样应对失败。
- 怎样避免失败。

这种失败学的思考方法，和刚才的数学思考过程是一样的。将日常生活中的失败抽象化，这是失败学的思考方式的根本所在。

用图表示失败学的思考路径如下：

规律·概念



（一般化）



（抽象化）



失败事例



但是，经理们不理解这个思考路径，反过来认为

规律·概念



自己的问题

直接把规律与概念往自己的问题上套。

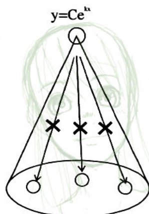
跳过抽象化和一般化的阶段，一下子扑到规律与概念上是不行的。这样做的话，就会和现实世界脱节。

于是，结果就是虽然理解了规律和法则，却不能应用在实际生活中。

实际上，最重要的是从现实世界上升到抽象世界的过程。反复思考现实中的失败事例，总结出规律与概念。这样，才能学会活用这些规律和概念。

一不小心说了很多关于失败学的东西。总之，微分方程也和失败学一样。可以从具体上升到抽象，却不能逆向行驶（千万不要尝试）。





例如，微分方程最常见的解是 $y=Ce^{kx}$。这个解抽象地表示“某个时刻的变量与这一时刻的总量成比例”。

左图中代表的，是复利式贷款、热传导现象、振动现象、放射性元

素分裂、细菌繁殖等日常世界中的现象。将这些现象抽象化、一般化以后，得到 $y=Ce^{kx}$ 这一抽象的表现方式。

但是，反过来，如右图所示，将 $y=Ce^{kx}$ 这一抽象表现具体化，在日常世界中就有无数个对应点。要用 $y=Ce^{kx}$ 表示复利式贷款，就要确定常数 k 和积分常数 C，并将其单位标准化。

可是，抽象世界里没有日常世界中具体的属性。一进入抽象世界，k 和 C 就可以是任意值，变量可以取任意的单位。可以取任意值，也就意味着不能确定是哪个值。也就是说，即使想回到现实世界里，也回不来。

令人头疼的是，很多学习数学的学生，也和刚才讲的经理们犯了同样的错误。很多学生一旦进入数学的抽象世界，就再也回不到日常世界中来了。

不知道数学老师有没有注意到这个问题。

就我看来，数学家们都沉浸在抽象的世界中，一点儿也没发觉这个问题。不过，他们跟日常世界绝缘也没关系，因为沉浸在抽象世界正是他们的工作。

可是，普通人就不能这样了，和日常世界绝缘就无法生存。所以，质问“为什么要学数学”的人，从某种意义上来说，都是感觉敏锐的人。他们在与日常世界隔绝的抽象世界里会感到不安。

我写这本书就是为了消除这种隔绝状态，让大家体会到数学世界原本是丰富多彩的，学会把数学中的伟大成果应用到生活中去。

●整体藏在部分之中

我刚才说过，微分方程是由部分推想出全体的工具。既然是工具，不能使用就完全没有意义。那么，应该怎么使用这个工具呢？

比如说，我们来观察自然界发生的某种现象。现象每分每秒都在变化。将时间和变化绘成表，变化的轨迹就会清晰地浮现出来。

假设现在我们手上有一些关于这个现象的信息，但是，与现象整体相比，这些信息很有限。它们只是关于"某一瞬间"的信息。一般情况下，我们能够得到的，都是这些关于部分的信息。

人不能一下子就了解整体。要了解现象的整体，除了利用"关于部分的信息"，没有别的方法。微分方程就运用了这一方法，它表示出了"关于部分的信息"和关于整体结构之间的量的关系。

不过，不能像看拼图那样把"关于部分的信息"看成整体的一部分。因为它不单纯是"关于部分的信息"。"关于部分的信息"必须符合下面两个重要条件。

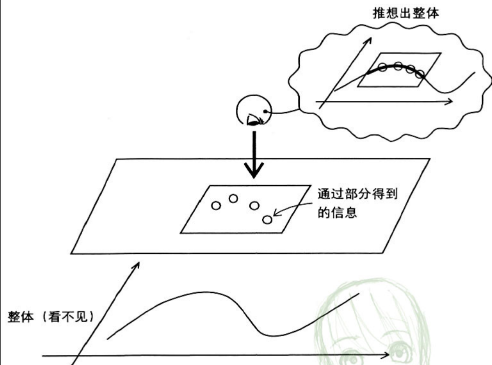
条件一：它是部分所固有的详细信息。

条件二：它能反映支配现象整体的规律。

"通过部分看整体"，并不是说死死盯着部分，整体就会自动浮现出来，而是要详细了解部分。同时，通过观察部分总结出来的规律，必须适用于整体，这样才能通过部分推想出整体。

但是，还存在一个棘手的问题。那就是，条件二很难得到保证。因为在了解整体以前，我们不可能知道"这一部分能反映支配现象整体的规律"。

于是，既乐天又任性的人们，就来了一个"大跨栏"。他们毫无根据地相信条件二已经成立，据此来推想整体。推想的过程就是解微分方程。



●分离变量为什么很重要

先离开主题讲一个重要的问题，下一节再详细讲怎样解微分方程。

本章一开始说过，可解的微分方程很少。我们看到的微分方程，大部分是不可解的。过去人们一遇到这种方程就非常头疼，不断向它发起挑战。但直到现在，不可解的微分方程还是不可解。

那么，这些不可解的方程要怎么处理呢？人们遇到问题时，会有“不解决不行”这种强迫性的想法。但是，有些微分方程没有必要解。只要记住不要去解不能分离变量的微分方程就行了。换句话说，只要会解可分离变量的微分方程就足够了。

可分离变量微分方程最重要的特点是解为e的几次方。实际上，只要观察自然和社会现象，并用微分方程表示它们，就会发现微分方程的解大多为指数函数$y=Ce^{kx}$。例如，复利式贷款、热传导现象、振动现象、放射性元素分裂、细菌增殖等，各种各样的现象都可以用这个函数来表示。

教科书上说，由此可以看出“各种各样的自然和社会现象都可以用微分方程表示”，以此强调微分方程的重要性。这种说法不完全正确。正确的说法应该是，很多自然和社会现象都可以表示为解为指数函数$y=Ce^{kx}$的微分方程，所以微分方程很重要。

导出这个解的，就是变量分离。这就是分离变量的重要之处。

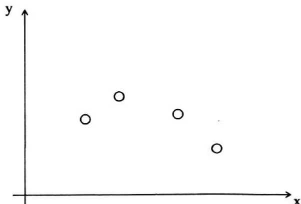
●解微分方程

下面回到正题。解微分方程是一个复杂的过程。现在我们来分解解微分方程的步骤。

数学1·2·3

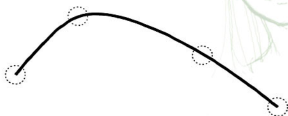
“不要去解不能分离变量的微分方程”，不是说“不要去寻找答案”。现在即使不自己解，计算机也能告诉我们答案。最近有一种软件，只要输入数值马上就能得到答案。这样，问题就不在于如何求解，而在于怎样编出高效率的计算程序。现在几乎没有必要再分离变量，进行求解了。只要能得出最后的计算结果就够了。这在实际运用中，一点儿问题都没有。

例如，观察一个现象，把它画成图。



假设我们只能从图中的圆圈部分得到关于现象的信息。

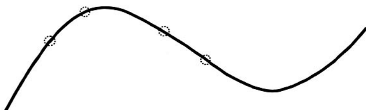
看到上图后，首先应该做的不是看圆圈的值，而是寻找这部分所反映的关于整体的规律。这时人们开始“思维大跨栏”。看到分散分布的圆圈，脑中浮现出下面的曲线。



这种“思维大跨栏”很有趣，人的想象力很丰富，会“无中生有”，而且一点也不会感到不妥。下面该做的，是“把脑中浮现的曲线，看做

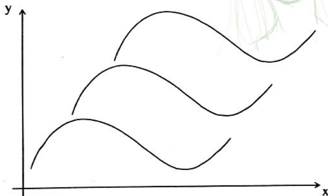
整体曲线的一部分”。就这样，刚才的“思维大跨栏”就合理化、正当化了。也就是说，我们认为，“这条曲线符合支配现象整体的规律”。

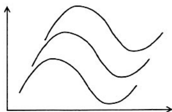
既然这条曲线符合支配现象整体的规律，那么未知的延长部分必然也符合支配现象整体的规律。虽说这一点不能得到证明，我们还是延长曲线，得到整体的图像。



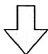
可是，又出现了一个麻烦的问题。现在我们确实知道了曲线整体的形状，但不能确定这条曲线经过坐标轴上的哪一点。

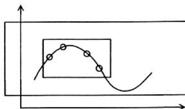
可能是图中的任意一条曲线，我们不能确认是哪一条。这时，前面图中圆圈的值就派上用场了。现象对应的曲线，必须经过圆圈，这样就可以确定是哪条曲线了。这条曲线就是微分方程的解。



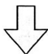


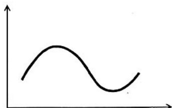
不能确定是哪条曲线





对照选择







选定一条曲线
‖
微分方程的解

数学1·2·3

刚才看到的曲线群，叫做微分方程的一般解。现象对应的曲线，必须经过圆圈叫做初始条件。满足初始条件的曲线叫做微分方程的特解。解是否能确定为一条曲线，叫做解的唯一性。

7……未来被等分

概率

能不能靠赌博生活？答案很清楚，不能。为什么呢？因为庄家抽头钱，钱都被庄家赚去了。赛马、赛车、彩票，头钱都是2成，赚钱的是庄家。他们先提走自己要的部分，然后把剩下的适当分配给赌客。那些提议建赌场的人，大家该知道他们的用意了吧。但是，明知道赌博不赚钱，为什么还有很多人去赌博呢？因为他们没有算“期望值”。如果算了期望值，就不会再去赌博了。话虽如此，如果每件事都把期望值算得清清楚楚，人生就没有一丝乐趣了。

●一切都可以换算成金钱

先从另一个话题说起。比如说，现在手上有1000日元。这1000日元中，车费要200日元，午饭花500日元，喝咖啡300日元。“吃盒饭”、“喝咖啡”都是吃，可以归为一类。“乘车”不是吃，是行。不过，它们都要花钱，在这一点上三者是相通的。

脑筋转得快一点的话，我们可以得出一个结论：人类活动都可以换算成金钱。

这样说可能有人会觉得“没品”，他们会反驳说：“美妙的音乐、精美的绘画、令人心旷神怡的景色，这些怎么能换算成金钱呢？”当然可以。如果想欣赏这些东西，就要购买入场券，付出一定的费用。有些人也许会觉得这种算法很低俗，对此不屑一顾。但是，人类的活动确实都可以用金钱来衡量。人类很早以前就发现了这一点。金钱是人类漫长的历史中最大的发明。

现在，我们渐渐接近了本章的主题——概率。下面我们来考虑一下GNP[①]。假设现在汽车产业增长迅速，因此，国家提出一个项目，投入GNP的30%发展汽车产业。可是，把GNP的30%投入汽车产业，感觉有点冒险。那不就变成了只生产汽车的国家了吗？于是，需要仔细评估这个项目。

项目评估有以下内容：社会需求、前景、项目构成、是否符合社会要求、是否有充足的人力资源，等等。要评估项目，必须先像这样设定几个评估项，给每项评分。5分是满分，1分是最低分。及格给3分，优

---

①GNP，国民生产总值，指全体国民一年间生产出来的价值总额——编者注。

秀给5分。把所有的得分加起来，根据总得分判断是否应该启动项目。

这种评估方法有以下3个关键点：

1. 评估项可以从各个方面设立。

2. 各评估项不能相似，必须有区别。

3. 对各评估项一视同仁，将它们等量化。

这3点是评估的前提条件。特别是最后一点，反映了人脑的灵活之处，其实这一点根本无法保证。将属性各异的各评估项等量化，计算出总分进行评估，是“一刀切”，是“野蛮”的做法。其实，只有这样做，才能评估事物。肯定还有人会提出异议：“难道没有更好的办法了吗？”但不管三七二十一做了再说，这正是评估的特点。

●概率里的小花招

刚才说了这么多，都没提到概率，大家可能会感到疑惑，不知道为什么要说这些。其实，概率的思考方式和项目评估有异曲同工之处。

概率也是对属性迥异的东西一视同仁，我把它叫做概率等分原则。“原则”听上去感觉很严肃，其实只是个假设，是个小花招，把它当成“原

数学1·2·3

我是日本经济产业省项目评估委员会的一员。这里介绍的评估方法，最近为日本各省厅所采用。一直以来，日本的各个项目都是单独进行评估，得出来的评估结果多是“本项目很有意义”。

这种评估结果过于主观，招致了国民的批评，要求改变评估方法。于是，就变成了至少在同一省厅内，所有的项目都必须进行同类的评估。经济产业省一丝不苟地执行这一规定，设定了6个评估项，以评估本省厅内所有的项目。导入这一评估办法后，哪些项目应该继续实施，哪些应该终止都分得一清二楚。

则”是为了方便说明。因此就暂且把它视为一个原则了。

那么，我们想想教科书上怎么解释概率的。解释概率必然出现掷骰子的例子。过去过新年时大家都玩掷骰子，现在这种游戏已经过时了。姑且不论这些，先看看教科书的解释。

一般条件下，实验中发生所有事件的可能性都相同，那么某事件发生的概率 P 就是

$$P = \frac{\text{某事件发生的次数}}{\text{所有事件发生的次数}}$$

例如，这里有一个6面的骰子，掷出每面的可能性都相同，掷出5的概率是：

掷出 5 的次数 =1

掷出所有点数的次数 = ｛1，2，3，4，5，6｝=6

因此，概率 P 就是 $\frac{1}{6}$。

可能性是相同的，想必大家都对这种说法感到有些纳闷，难以理解吧。这就是我说的概率等分原则。

再说一遍，这是个小花招，并没有隐藏着什么深奥的真理，只是为了方便才这么假设的。

数学 1·2·3

统计力学中有能量均分原理，概率等分原则是它的数学版。例如，现在三维空间中有一粒原子，统计力学认为，这粒原子向 x 方向、y 方向、z 方向平均放射能量，这就是能量均分原理。原理和规律不同，不是推导出来的东西，而是原本就存在的东西，相当于数学中的公理。

可是，教科书不会自己说“这是一个花招”。因此，应该由进行教学的老师说明，但老师也不会揭穿这一点。于是，这一点就永远模糊不清、不为人知了。

●概率讲的是未来的事

人们总是异想天开，希望能预知将来会发生什么事情。概率这个概念，可以说就是人们“预见未来，把握现在”的愿望在数学上的体现。

换句话说，概率只有在事件还未发生、需要预见时才有意义。

人们好像都误解了这一点。大家想一想报道台风情况的新闻。播音员会说“台风仍在蔓延中”，这很可笑。摄制新闻和播放新闻有时间差，播放时台风可能已经结束了，这时再预测完全没有意义。

概率的情况也相同，说已经发生的事“概率多少”是完全没有意义的。

那么，数学上是怎么表示预知未来的概率的呢？数学是按照下面的步骤来思考的：

1. **假设所有可能的结果，并一一列出来。**
2. **对所有的结果一视同仁，将其等量化。**
3. **计算每个结果与结果总数的比值。**

这样算出来的概率，在未来面临选择的时候，为人们提供一个判断的依据，增加了自信。

人人都有数字信仰，不看到数字就觉得不可信。人们想通过数学精密的理论体系来预见、把握未知的将来，这才有了概率。

因此，概率思考的是还未发生的未来的事。等到事件发生以后，一切已成定局，再来谈概率就没有意义了。发生之前可以猜测概率是50%或70%，发生以后概率不是0就是100%了。

●概率里的思维转换

这样看来，概率真是个“大老粗”。事物的属性千差万别，概率非要对它们“一视同仁”，强迫大家搞“一刀切”。不过，不这样做就无法进行预测。

我刚才说过，概率代表了人们“预知未来，把握现在”的愿望。换句话说，概率不仅是人们预测未来的工具，也是人们选择未来的判断依据。

要注意的是，概率是对未来的思考，而不是对未来的理解。

的确，概率是对未来的思考。但更为紧迫实际的是，现在该如何行动。因此，光知道未来将会发生什么事还不够，还要利用预测结果，指导现在的行动。

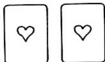
概率在数学体系中大放异彩的原因也正在于此。概率产生于现实世界，应用于现实世界。和其他许多数学概念不同，它不是抽象世界的产物。不过，概率中有其他数学概念中没有的思维转换。

数学1·2·3

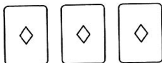
可能大家觉得上面讲的都是理所当然的事，不需要废话。但是清楚地意识到概率讲的是未来的事很重要。数学有一种魔力，能把人带入它独特的抽象世界中。一旦进入这个世界，多数人就会拼命去追寻某一个问题的答案，深陷其中，再也出不来，于是忘记了自己最初为什么要学数学。

我们来看看计算概率的思路。例如，扑克牌游戏。现在有 10 张牌，牌面如下：

红桃　2 张



方块　3 张



黑桃　1 张



梅花　4 张



数学 1·2·3

40 多年前的高中数学就教概率。数学老师们都觉得概率很难教。这是因为升学考试不考这部分内容，学生们也都是左耳朵进右耳朵出。出现这种情况，可能是概率跟微积分、三角函数等确定的真理不同，是关于未知的未来知识，因此有很大的“模糊性”。

把这10张牌混在一起，然后随便抽出1张。抽出红桃、方块、黑桃、梅花的概率各是多少呢？这个问题很简单。

$$\text{抽出红桃的概率}=\frac{2}{10}$$

$$\text{抽出方块的概率}=\frac{3}{10}$$

$$\text{抽出黑桃的概率}=\frac{1}{10}$$

$$\text{抽出梅花的概率}=\frac{4}{10}$$

这就是答案。

但是，知道这个答案又怎样呢？不进一步思考，就无法把握概率的本质。只知道概率的值是完全没有意义的。

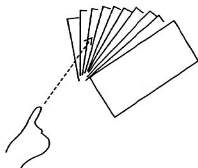
刚才说过，概率是指导行动的依据。要利用概率来指导行动，需要进行思维的转换。

概率是按照下图中的步骤求出来的。

但是，光求出概率的值还不够。还要问一问，求出了结果又怎样？求出概率的值并不是目的。

那目的是什么呢？

目的是“猜中抽出的是什么牌”。以“猜牌”为目的，就需要把刚才的步骤倒过来。



行动

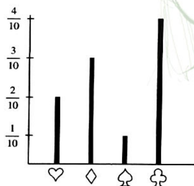




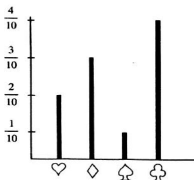
结果





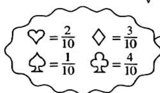


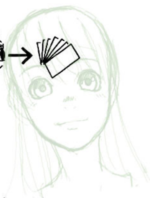
理解



本来的属性

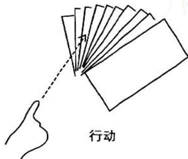






判断依据





行动

人都是功利主义者，为了达到目的，不管怎么偷换概念都无所谓。例如，在刚才扑克牌的例子中，本来概率是多次抽扑克牌得出的结果，我们却把它当成了红桃、方块、黑桃、梅花本来就具有的性质。

但是，只有这样做才能“猜出扑克牌”。也就是说，认为抽出红桃的概率是$\frac{2}{10}$，抽出方块的概率是$\frac{3}{10}$，抽出黑桃的概率是$\frac{1}{10}$，抽出梅花的概率是$\frac{4}{10}$，就能据此判断抽出的牌是什么牌面。

人是先思考再行动的动物。正因为如此，人才需要概率。

●通过过去了解未来

下面我们来看看实际生活中概率是怎样应用的。

我们最熟悉的概率，就是棒球的打率。

就像前面说过的，打率是把已知的结果数字化，所以可能有些人认为不能算是概率。确实如此，不过，打率还有一个特点，承认这个特点，才能承认它也是概率。

这个特点就是，打率是根据过去的成绩来猜测现在和未来的情况。

击球员站在打席上打出安打的可能性，可以通过过去的成绩（打出安打的打席数/总打席数）推测出来，这就是打率，是根据过去的情况预测将要发生的事。

这里请大家注意，我们默认了过去、现在、未来有相同的可能性。

这就是前面说到的概率等分原则，也就是“一刀切”。因为谁也不能保证过去发生的事和将要发生的事有相同的可能性。

击球手面临的状况随比赛进行不断变化。对方的投手是谁，跑垒员的上垒情况，自己的情况等。严格来说，每个打席、每个球，情况都各不相同。但是，我们完全无视这些差别，假设“不论何时、不论哪个打

席都一样”。这个假设是打率成立的根本所在。如果不承认这一点，一切就都不成立。

重要的是，承认过去和未来的连续性。要预知未来，只有参考已经发生的事。

以西雅图水手队的铃木一郎的打率为例，他和亚历桑那州响尾蛇队的兰迪·约翰逊的比赛成绩是多少？和波士顿红袜子队的贝德洛·马鲁奇内斯的比赛成绩又是多少？[①]像这样，先把过去所有打席的情况理清楚，得出铃木一郎的安打占总打席数的31.6%。于是，铃木一郎站在1号击球区的位置，不论过去还是现在，打出安打的可能性都一样。有了这个前提，31.6%就可以看做是“铃木一郎在这个打席上打出安打的概率（打率）”。

不过，有时这种假设并不成立，比如说经济预测。社会经济状况每分每秒都在发生变化。这时，过去和未来的连续性就无法保证。当社会结构发生变化，各种相关因素也发生巨大改变时，就不可能再根据过去的成绩预测未来。因此，经济预测都靠不住。

数学1·2·3

概率这个概念有〝一刀切〞的假设前提，又在思维上玩了小把戏。因为没有人说破这一点，所以变得难以理解。不知道这些，就不可能理解概率的思维方式。

---

①西雅图水手队、亚历桑那州响尾蛇队和波士顿红袜子队都是美国职业棒球联赛中的知名棒球队——编者注。

这样想，就会明白教科书上只拿掷骰子举例是不无道理的。虽然这种例子已经完全不合时宜，但至少骰子掷出各种点数的几率不论过去还是未来都不会改变。因此，可以用它来解释概率。可惜的是，这么重要的一点教科书却并没有说明白。

●概率就是大概的几率

2003年10月29日，运载着2枚间谍卫星的H-IIA火箭六号机，由于火箭推进器无法脱离火箭主体，只好下令销毁。我作为JAXA（日本宇宙航空研究开发机构）事故调查委员会的一员，调查了这一事故。

发射火箭时会出现许多无法预知的事故和阻碍。发射以前，要设想所有可能出现的问题，计算发射失败的概率。例如，假设：

火箭主发动机出现问题：2%

防御系统出现问题：2%

通信系统出现问题：1%

火箭推进器出现问题：1%

发射时出现问题：1%



首先，要算出所有可能出现问题的概率。

要想出所有可能引起发射失败的问题，并假设这些问题都是独立的，相互没有关联。接着，把所有问题的概率加起来，就得出发射失败的概率是7%。反过来说，发射成功率就是93%。

“火箭推进器出现问题”造成发射失败的概率假设是1%。调查结果显示，推进器的一个喷嘴的内壁破了，高温天然气喷进火箭，破坏了火箭分离的导线。在相同条件下，这种问题不一定会出现。100次中只会出现1次。

不过，要注意1%这个数字。也有可能100次中1次也不会出现问题。归根结底，概率只是个大概的数字。

还要注意发射失败率7%这个数字。概率真是很麻烦，要无限次重复发射火箭，才能得出7%这个数字，这谁都知道。但是，实际中不可能无限次重复。而且，就算知道概率是7%，也不知道问题什么时候会出现。7%也不是说发射100次，一定会失败7次。可能1次也不会失败，也可能连续失败3次。

概率中有个“概”字，所以，就要大大咧咧地把它看做是个大概的数字。现实世界中的概率，确实就是这样。

话说回来，火箭发射失败之所以会引起社会极大的反响，是因为发射火箭要花费大量资金，而这都是纳税人的钱。因此，为以防万一，火箭都上了保险。

假设发射一次H-IIA火箭要花费100亿日元，并且上了保险，那么发生一次事故保险公司就要向JAXA支付100亿日元的赔偿金。于是，保险公司根据JAXA算出来的失败概率，算出

发射费用(100亿日元)×发射失败概率(7%)=7亿(日元)

一次发射最低收7亿日元保险金。从长远来看，要保证保险公司付得出

数学1·2·3

掷骰子和抽扑克牌用到了概率等分原则，实际生活中的现象要分几个方面进行概率预测。火箭出现问题的概率，是参考过去采取同类技术的实验结果算出来的。

赔偿金，交保险金是必要的，这就是数学上的“期望值”。

数学1·2·3

期望值一般是指希望发生的事情，这里却用来指不希望发生的事情，有点奇怪。

对保险公司来说，7亿日元的保险金不值一提。可是一旦发射失败，就要赔100亿日元，因此大意不得。为了赚钱，保险公司比根据概率算出的金额多收一点儿，这也是理所应当的。

如果火箭发射失败的话，保险公司就必须赔钱，于是有人说，是不是概率太低了，15%才差不多。宇宙开发的经费和概率密切相关，风险大得吓人。

数学1·2·3

说得俗一点，概率就是为赌博找理由。人与人的想法千差万别，赌博时的作风也各不相同。有人认为概率虽低但只要中了就能赚大钱，也有人认为不大赌就不会大赔。因此，赌博的人并不仅仅看概率下注，还会比较猜中概率的所得和猜不中的损失。因此，要比较、衡量概率和赌金再下注。一旦下注，人们的心中概率就变成了100%。所以，赌博确实可怕，可以让人的头脑失去冷静。

附录1　直观的诀窍在于默记和心算

经常有人问我："畑村老师，你计算起来又快又准，有什么秘诀吗？"甚至有人说："你算得太快了，这不是寒碜我们吗？"我能算得这么快，原因很简单。基本数字的运算结果我记得滚瓜烂熟，心算就行。现在我来教大家这个方法。请大家先记住：直观的诀窍在于默记和心算。

●先凑整，再补零

比如说，我们来算 17+34。通常是像下面这样从个位数开始运算：

$$\begin{array}{r} 1^{1}\ 7 \\ +\quad 3\ 4 \\ \hline 1 \end{array} \quad \rightarrow \quad \begin{array}{r} 1\ 7 \\ +\quad 3\ 4 \\ \hline 5\ 1 \end{array}$$

这样来运算，数字简单还好，数字变复杂以后，算起来就会很麻烦。进行数字运算的时候，先凑整，再补零是必须牢记的铁的原则。

还是拿 17+34 来举例。4 加 7 是 11，把多出来的 1 放在一边。17 凑成20，34变成30。20+30=50，然后加上刚才的1。答案就出来了，是51。计算速度快的人就是这样心算的。

●利用数字的特征

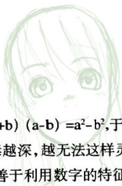
我们再来算 17 × 23。有人又会老老实实地从个位开始算起。

$$
\begin{array}{r}
17 \\
\times \quad 23 \\
\hline
51 \\
34 \\
\hline
391
\end{array}
$$

完全按照教科书上教的方法，太死板了。数字运算可以自由发挥，只要得出答案就行了，要想出更简便的方法。

比如说，可以这样在心里心算，将所有的数字都变成个位是零的整数。于是，17 就变成了 20，23 也变成 20。答案就很快出来了。

$$
\begin{aligned}
17 \times 23 &= (20-3) \times (20+3) \\
&= 400-9 \\
&= 391
\end{aligned}
$$



算得快的人马上就能看出套用了 $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$,于是他们若无其事地轻轻松松就算出来了。中数学的毒越深，越无法这样灵活运用，只会老老实实地一步一步算。要记住，要善于利用数字的特征！

●只要记住这些开方就行了

只要记住 $\sqrt{1}$ 到 $\sqrt{10}$ 的开方就行了。记住了这些，就能应付其他的运算。

$\sqrt{1} = 1$

$\sqrt{2} = 1.41421356$

$\sqrt{3} = 1.7320508075$

$\sqrt{4} = 2$

$\sqrt{5} = 2.2360679$

$\sqrt{6} = 2.44949$

$\sqrt{7} = 2.64575$

$\sqrt{8} = 2 \times \sqrt{2} = 2.82842$

$\sqrt{9} = 3$

$\sqrt{10} = 3.16227766$

●只要记住 $\log_{10}2$ 和 $\log_{10}3$ 就 OK

只要记住 $\log_{10}2$ 和 $\log_{10}3$ 就 OK!其他的都可以计算出来。



$$\log_{10}2 = 0.3010$$

$$\log_{10}3 = 0.4771$$

我们往下计算。$\log_{10}4$ 很简单。

$$\log_{10}4 = \log_{10}(2 \times 2) = \log_{10}2 + \log_{10}2 = 0.6020$$

利用数的特征来计算$\log_{10}5$。把5凑成10，对数就变成了1。5凑成10要乘以2，于是就变成下面这样：

$$\log_{10}(5\times2)=1 \quad \rightarrow \quad \log_{10}5+\log_{10}2=1 \quad \rightarrow$$
$$\log_{10}5+0.3010=1$$

也就是

$$\log_{10}5=1-0.3010=0.6990$$

$\log_{10}6$也简单。

$$\log_{10}6=\log_{10}(2\times3)=\log_{10}2+\log_{10}3=0.7781$$

$\log_{10}7$现在还不好算，暂且放在一边。

$\log_{10}8$也很简单。

$$\log_{10}8=\log_{10}(2\times2\times2)=3\times\log_{10}2=0.9030$$

知道了$\log_{10}8$，再回过头来计算$\log_{10}7$。大概估计一下，应该是在$\log_{10}6$和$\log_{10}8$之间吧。

$$\begin{aligned}\log_{10}7 &\approx (\log_{10}6+\log_{10}8)\div2\\ &\approx(0.7781+0.9030)\div2\\ &\approx0.8406\end{aligned}$$

正确答案是0.8451。不过在实际应用中，知道这个近似值已经够了。

$\log_{10}9$ 更简单。

$$\log_{10}9 = \log_{10}(3\times3) = \log_{10}3 + \log_{10}3 = 0.9542$$

像这样，只要记住 $\log_{10}2$ 和 $\log_{10}3$ 就 OK 了！

●记住 2 的乘方

我们经常用到 2 的倍数。记到 2^{10} 就够了，剩下的不用记。

$2^0=1$	$2^6=64$
$2^1=2$	$2^7=128$
$2^3=8$	$2^8=256$
$2^4=16$	$2^9=512$
$2^5=32$	$2^{10}=1024$

特别的是 2^{10} 为 1024，很接近 1000，所以有时为了方便，也记做：

$$2^{10} \sim 10^3$$

●记住这些平方

记住 1~20 的平方很有用。可惜的是，很多人只记到 10 的平方，过了 10 就反应不过来了。死记硬背有时也有好处，特别是对工作中要用到

数字的人来说，更是必需。虽说如此，我自己也只记到了16，真不好意思。

$11^2=121$	$16^2=256$
$12^2=144$	$17^2=289$
$13^2=169$	$18^2=324$
$14^2=196$	$19^2=361$
$15^2=225$	$20^2=400$

即使忘记了其中一个，也不用担心，看看前后的数字也大致可以猜出来。例如，忘了17^2是多少，因为$16^2=256$、$18^2=324$，就可以猜出大约是300。准确答案是289。不过在实际中，回答300就够了。19^2在$18^2=324$和$20^2=400$之间，可以猜出大约是360。准确答案是361。如果忘了，也可以像这样轻轻松松猜出大概值。

至于是否准确，可以回过头再来确认。刚开始不要拘泥于细节，要大胆训练自己猜答案的能力，这才是实际应用中的运算铁则。

●加1相乘

下面教大家怎么算15^2、25^2、35^2、45^2、55^2、65^2、75^2、85^2、95^2。例如，心算65^2。步骤如下：

1. 先看65^2中的6。
2. 6加上1。$6+1=7$。
3. 用6乘以7。$6\times7=42$。
4. 42的后面写上25，就是4225。65^2就是4225。

按这个方法算一遍 15^2～95^2。

$15^2=225$　（① 1 → ② 1+1=2 → ③ 1 × 2=2 → ④ 225）
$25^2=625$　（① 2 → ② 2+1=3 → ③ 2 × 3=6 → ④ 625）
$35^2=1225$　（① 3 → ② 3+1=4 → ③ 4 × 3=12 → ④ 1225）
$45^2=2025$　剩下的大家可以自己做了！
$55^2=3025$
$65^2=4225$
$75^2=5625$
$85^2=7225$
$95^2=9025$

●多一倍或者少一半无所谓，但不能相差太悬殊

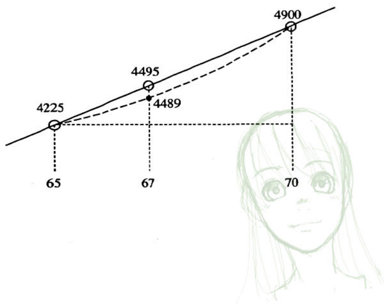
这样，没有计算机我们也能大概算出数字的平方了。例如，计算67^2。

1. 前面我们记住了 $65^2=4225$，$70^2=4900$。
2. 两者相减。4900－4225＝675。
3. 得出的数字除以 5。675 ÷ 5＝135。
4. 得出的数字再乘以 2。135×2＝270。
5. 加上 4225。270＋4225＝4495
6. 答案就是 4495。

用计算机算算看，答案错了吗？是的，准确答案应该是4489。不过，

我刚才说了，不要拘泥于细节，要大胆训练自己猜答案的能力。像我这样的技术工作者，遵守的原则是“可以多一倍或者少一半，但不能相差太悬殊”，只要能做到这一点，不知道准确的数字也无所谓。一句话，猜出大概结果就可以了。4495 和 4489 并没有多大差别。

不能认可这一点的人，请看下图。刚才我运用的这种计算方法叫做直线补全计算法。



附录2　自己算出来

●不准说“不知道”、“查查看”

不知道具体数量时，很多人会说“让我去查查看”。碰到这种人，我就会想：“没有工具就什么都干不成了吗？真可笑。”

例如，说到“铁的热膨胀率”，大多数人马上就会说“谁知道呀”，其实不是这样的。即使不知道，也一定有办法知道。

我们坐火车的时候，听到火车发出“哐当、哐当”的声音，那是火车经过铁轨接口处的空隙发出的声音。为什么会有空隙呢？那是因为铁轨受热膨胀。大家没看过铁轨弯曲后的照片吧。铁轨之所以弯曲是因为铁轨的空隙太小，受热膨胀后导致铁轨发生挤压变形。

接着我们就想到了铁的热膨胀率。把弯曲的铁轨和“哐当、哐当”的声音结合起来，是不是就能算出热膨胀率呢？手边没有书，也没有计算机，没有任何工具，但我们还是可以算出来。调动一切可利用资源，我们来尝试一下。

铁轨都很长，几百米的铁轨不是完整的一根铁轨。首先，必须要能运到建筑现场。那么，一根铁轨多长比较好呢？如果是50米长的话，很可能会发生弯曲或者其他偏差，那就减一半，25米吧。

我们不知道铁轨间的空隙有多大。但肯定不是1毫米。如果是10厘米，又会脱轨，那就定为1厘米吧。

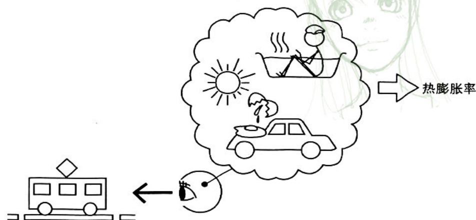
在烈日炎炎的夏天，铁轨会变弯曲，这很容易想象。摸摸烫手的汽车发动机罩就知道了。不过，烫手究竟有多少度，我们不知道。应该是比洗澡水还热一点。平时洗澡水多少度我们是知道的，大概是42℃或是43℃。那就取43℃到100℃的中间值，70℃。

同时，想象一下铁轨收缩的情况。东京冬天的早晨大约有0℃。这样一来，夏天膨胀的时候和冬天收缩的时候，铁轨的温差达到了70℃。也就是说，70℃的热量才使铁轨伸缩了1厘米（0.01米）。

现在万事俱备，只欠东风。热膨胀率用α可以这样表示

$$\alpha = \frac{1}{25} \times \frac{0.01}{70} = 6 \times 10^{-6}\ (℃)$$

准确答案是10^{-5}℃。有人可能会说："多了几倍！"但是，相差并不是太悬殊。



像这样，仔细观察身边的现象，调动自己所有的知识，即使是不知道的数字，也一定有办法推算出来。在日常生活中跟数字打交道时，这一点很重要。“不查不知道”只是在为自己不动脑筋找借口。

因此，要想理解、运用、创造，就要调动自己的积极性。在创造活动中禁止说“不知道”。不要偷懒，自己算出想要的数据。

●不要拘泥于教条

要怎么求圆的面积呢？假设直径是D，大多数人会套公式

$$\left(\frac{\pi}{4}\right)D^2$$

且慢，每次都要计算 $\frac{\pi}{4}$ 多麻烦。不如一次算好，记住就是

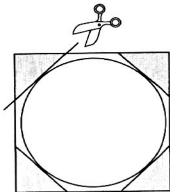
$$0.785\ D^2$$

785这个数字很奇妙。比如，铁的比重是7.85，原油的平均比重是0.785，都是7、8、5。世界上就是有这种奇怪的数字。总之把它记住，有百利而无一害。

数学1·2·3

铁的热膨胀率对机械设计者来说是必不可少的数据。“不知道就不够格！”教给大家一个死记的方法。“10厘米·1度·1微米”，就是说，温度上升1℃，10厘米的铁膨胀1微米。记住这样的数据很有用。而不知道的时候就要开动脑筋，这很重要！

那么，圆的面积也能用这个公式计算吗？当然可以。不过不用这么麻烦，把圆看成四边形，然后计算，结果也差不多。“可以多一倍或减一半”，这样想的话就没问题了。如下图，剪掉四边形的4个角：



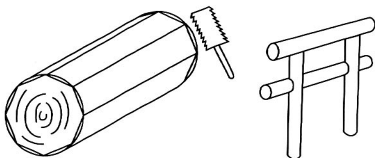
要剪掉多少？目测一下，大概是$\frac{1}{3}$。假设四边形的边长为1，剪掉的4个角的面积是：

$$\left(\frac{1}{3}\right) \times \left(\frac{1}{3}\right) \times \left(\frac{1}{2}\right) \times 4 = \frac{2}{9} \approx 0.22$$

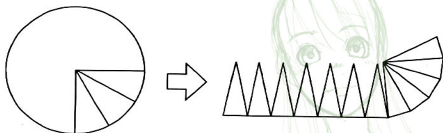
四边形的面积减掉这个值，就是圆的面积。

$$1 - 0.22 = 0.78$$

怎么回事？又是0.78，这个数字还真像幽灵一样，无处不在！

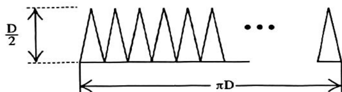


π是圆周率，为什么会出现在面积里？仔细想想觉得很不可思议。要知道原因，请把圆像切蛋糕一样切开。尽量切成小块，最后把它展开。



数学1·2·3

切掉四边形的4个角得到圆，在建造日本伊势神宫的华表时用到过这个方法。先把圆木切成方材，然后切掉角。最开始是切成八角形，最后切成了三十二角形。然后用刨子刨成圆柱。现在都用车床来加工，已经不再采用这种方法了。



展开以后，下边长是 πD。因为每块都很细，边长和高基本相等，即 $\frac{D}{2}$ 。把所有三角形的面积加起来，就是

$$\left(\frac{D}{2}\right) \times \pi D \times \left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{\pi}{4}\right) D^2$$

圆的面积里就出现了 π。

计算圆的面积时，不要教条地、反射性地想到公式（$\frac{\pi}{4}$）D^2。要开动脑筋，在脑中浮现出这样的模型，这一点很重要。死记硬背、不动脑筋是不行的。应该仔细观察周围的事物，利用各种资源，思考怎样算出自己需要的数值。

Q&A　为什么不懂数学

为了写这本书，我从现在工作的工学院大学“抓”来3个学生，前后2年，足足办了36次“畑村数学私塾”。每堂课大概3小时，总共上了110小时的课。我自己觉得挺得意，可说不定学生们心里都在想：“真受不了这位老先生！”课程时间太长，不知不觉地，学生们都已经大学毕业，跨入社会了。

不过，通过跟他们交流，我倒是亲耳听到了他们对数学的牢骚和埋怨(这些牢骚和埋怨都很有道理)。由此引起了我的思考，我把它们写进了这本书里。所以，没有他们的协助，这本书绝对写不出来。

猪冢真彦、川上宽弘、须山裕次，这次真是多谢了！

还有很多话题没有写进这本书，就这样丢掉实在可惜。因此我请岩波书店的编辑们编了这个小节。

题目就是，为什么不懂数学。

其中或许有不当之处，还请各位多多见谅。

●为什么不懂数学（理由一）

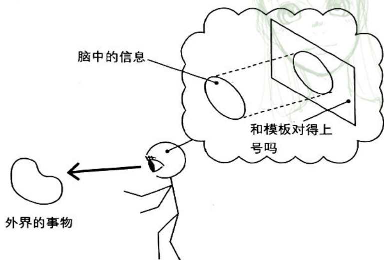
畑村：为什么不懂数学？理由一，就是学校教的数学不能让大家接受。也就是说，就算大家想弄懂，学校的教法也很难让大家接受。教科书上再三强调“这就是微分”、“微分很重要”，勉强举出个例子，拼命叫学生“理解、理解”，但学生却理解不了。因为学生不能把自己脑子里的

东西和要学的东西对上号。没有真实感，就不能接受。

“不能接受”，就是接受信息的大脑中的模板，跟灌输的信息对不上号，这一点很关键。数学老师们似乎都以为只要按逻辑顺序一步一步来，就自然而然水到渠成会理解了。其实不然，所谓“理解”到底是什么呢？对于事物大脑中预先有一个“模板”，也就是这个人的“思考的脉络”，外来信息和模板正好对上号，于是就“理解”了。

按逻辑顺序一步一步来就自然而然能理解，这是沉浸于形而上学理论的论调，绝对是错误的。对我们这些普通人来说，这种方法是行不通的。因为我们脑中有现成的“思考的脉络”，“因为什么，所以什么，于是什么”，这种潜意识中的“模板”和接受的信息如果正好能对上号，人们就会想：“啊，我懂了！”

不懂数学，是因为老师只作了形而上学的理论解释，跟大家脑中的模板对不上号。



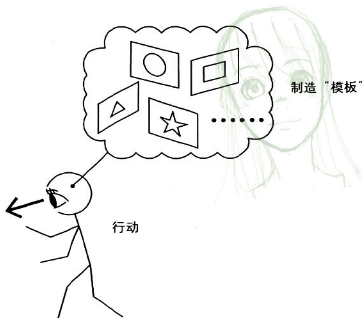
学生："潜意识"是说我们自己意识不到"模板"的存在吗？

畑村：对，我们自己意识不到。这种连我们自己都意识不到的东西是怎么产生的呢？是从行动中产生的。思考也是一种行动，动脑、动手、观察都是"行动"。

还有一点也很重要，人的理解力取决于通过行动产生了多少模板。不是知识，也不是经验，而是取决于采取了多少行动，脑中有多少模板。它决定了理解的深度和速度。

理解力超常的人，可以一边在脑中制造模板，一边吸收外来的信息。他们脑中有各种各样的模板。接收来的信息总会和其中一个模板对上号，于是就理解了。他们并不是接收信息后，再在脑中制造模板。

因此，懂数学还是不懂数学，都取决于脑中有没有模板，有多少模板。



问题的关键在于，从外界接收的信息是否跟脑中已经形成的模板对上号。之所以说教数学时生活的感觉很重要，也是这个原因。因为模板是在日常生活中制造出来的。

换句话说，思考不是构建理论，而是寻找与经验对得上号的模板。

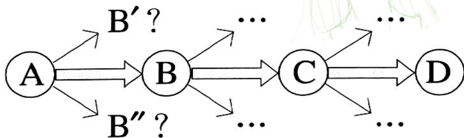
我在一开始就说过，学校里教的东西和大家脑中的东西有差距，这说明大家没有找到合适的模板。其实，模板已经在你脑子里了，大家脑子里一定都有。承认自己“不知道”似乎是一件羞耻的事，会让你觉得自卑，其实完全没有必要这样想。是教科书和老师的教法不对，学生完全可以要求：“请你们采用一种更符合我们思维的教法！”

●为什么不懂数学(理由二)

畑村:“不懂数学”的第二个理由，是形式逻辑式的说明方法不符合大脑的运作习惯。

这样说大家可能不知道是什么意思。一般的逻辑是这样的:“因为A所以B，如果B就会出现C。如果C就会出现D。”这就是形式逻辑。

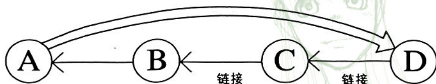
可是，我们自己思考的时候，从A出发,不一定得到B，可能是B′，



可能是B″，也可能是完全不相干的东西。因此就不知道选哪一个了。

但是，形式逻辑完全无视这些疑惑，“因为A所以B，如果B就会出现C。如果C就会出现D”。一般人会产生怀疑：“真的吗？”但数学老师们一定会说：“当然是这样，这是理所当然的。”完全无视大家提出的疑问“会不会是B′呢”。“为什么一定是B？怎么知道就一定是B？”有人这样问的话，老师就会不耐烦地说：“因为A所以B，如果B就会出现C。如果C就会出现D，这符合逻辑。没有为什么。”于是就不管三七二十一教给学生。

可是，“可能是B′，也可能是B″”，这些想法在学生脑海里挥之不去。这样一来，大脑就无法遵循A→B→C→D的思路了。而且，实际上，人们一听到A就会直接得出D的结论。没根没据，就这么跳过去。之所以这样是因为人们从行动中积累了不少经验，脑中已经积累了很多模板。因此，即使没有B和C，也能从A跳到D。



勉强搬出形式逻辑，只会让人产生种种疑惑：“可能是B′”、“会不会是B′”。

麻烦的是，形式逻辑往往和现实不相容。例如，对面有东西飞过来。谁都知道“撞上了会疼”，会尽量避开。按照形式逻辑，就变成了“有东

西飞过来。速度是多少，将会落到这里。撞着了可能会死。因此，必须要躲开”。脑中如果要进行这么复杂的推理，人类肯定早就灭绝了，有东西飞过来，不管三七二十一赶快躲开。因此，人类才能活到现在。

学生：等一下，老师。是不是只要得出D就行了呢？

畑村：这个问题嘛，我只是说“现实中发生的事不能都用形式逻辑来推理”，不是说形式逻辑完全没用处。

关键在于要反过来思考。形式逻辑遵循A→B→C→D的顺序，是后来总结的。如果说就是按这个顺序进行推理的，那是谎话。

实际情况是，听到A，脑中马上跳出结论D。根据结果D逆推，D→C→B→A，理出事物之间的关联；然后，若无其事地推出A→B→C→D的逻辑顺序，真狡猾。数学老师们绝不会挑明这一点。何止是不挑明，他们的头脑受形式逻辑熏陶已久，自然地就认同了A→B→C→D。

但是，思考事情的时候，能一下子理清A→B→C→D的都是数学天才。恐怕天才都难以做到，A→B→C→D是天才揭示出本质之后，后人整理出来的思路。

形式逻辑被赞誉为结构严密、构造精致，但按这种方法教数学真是要不得。我们普通人的头脑不适应这种思维方式，我们的思维方式是与之相反的。

一定要教形式逻辑，那就不要只说漂亮话，要揭示概念是怎么被创造出来的，从根本上挖掘思考的脉络。不这样的话就不能适应我们大脑的运作方式。

老师和学生的思路不同，这使我们觉得“不懂数学”，进而对数学产生厌恶。而数学老师们则会想：“这群学生，连这都不懂。”

那么，我们普通人的大脑是怎样运作的呢？刚才说过，听到A马上会想到D。然后想“D成立只要满足C就可以了，要满足C有B就可以了，B成立需要条件A”，这种思考路径叫做“思考链”，它是和形式逻辑反方向进行的。

“思考链”的优点在于毫不勉强、自然而然地进行思维。从A出发，有很多可能性，要一个一个确认才能前进。但是，如果反过来从D出发逆推，就简单多了。大脑一般是这样逆推的。

虽然普通人的脑子是这样运作的，数学课上却非要我们依照逻辑，从A到B，从B到C，从C到D。确实，从数学的角度出发，这是正确的。但这对“理解数学”却毫无用处，完全派不上用场，完全掌握不了也就无法应用。

尽管如此，数学老师还一味强调“数学中最重要的就是逻辑”、“不会数学就不会进行逻辑思考”。根本不是这么回事。逻辑思考确实很重要很必需，但跟“理解数学”、“掌握数学”、“使用数学”完全是两码事。这一点很多人不明白。

数学书上满篇都是形式逻辑，这也无可指责。可是，这样就“理解数学”了吗？还是没有。按形式逻辑思考，人们就会产生疑问：“为什么只能是B？为什么不是B′、B″，或是其他答案？”大脑就是有这么多疑问。

我见到的是，越聪明、越优秀的孩子越会产生疑问。但是，数学书只给了一个答案，那就是B。完全无视学生所产生的种种疑问，粗暴地给出标准答案：“就是B。”

想到了B′和B″的孩子，被标准答案堵住了思路。于是，他们就一个劲地想为什么只能是B，数学就进行不下去了。老师再说什么也得不

到回应。有些孩子是因为不理解所以不能作出回应，还有很多孩子理解了也宁愿保持沉默。教学不应该是单方面的灌输，老师应该了解孩子的想法。

聪明的孩子会从A直接跳到D。可是，老师一个劲儿要求他遵循A→B→C→D的顺序，于是他就会一个不落地考虑包括B在内所有的可能性。

可是，想来想去，也不知道为什么A一定会得出B。于是，就在这里迷惑了。别说是D了，连B都得不出来。

他们内心也想直接跳到D。但是，被形式逻辑五花大绑缚住了手脚，不能动弹，苦不堪言。

更可怜的是，这些造成孩子迷茫和痛苦的罪魁祸首都披着正义的外衣。本来孩子的想法是正确的，却认为跟不上教学是自己的错，产生了自卑感，觉得自己脑子笨。

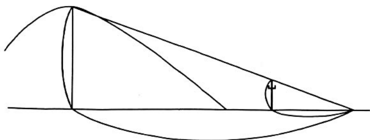
形式逻辑的教学，把很多聪明孩子变成了笨孩子。我认为这很要不得。本来孩子们会有很多有趣的发现，却被形式束缚住了。

学生：这样学生会很难受。

畑村：是啊。而且，从来没有人指出这一点。我觉得大家不诚实。所以，大家就都讨厌数学，更不懂数学了。

拿我自己来说，我小时候很喜欢数学。但是，我喜欢的是自己思考，讨厌形而上学的理论。

本书第1章讲到过，我小学六年级时，教数学的加藤老师曾在课堂上讲过这样的话："这里站着一个人，对面有座山。山和人之间有一根电线杆。已知电线杆的高度、电线杆和人之间的距离。怎样知道山的高



度？”这段话直到现在我还记得。

加藤老师说：“两个三角形相似（虽然他没有用‘相似’这个词），只要知道山顶正下方到人的距离，就能算出山的高度。”班里的同学都接受了这个说法，但我却充满疑惑。老师问：“畑村，怎么回事？”我问老师：“山和人的距离怎么测？是不是要挖隧道？”老师肯定觉得我很讨人嫌，因为我还钻牛角尖追根究底：“就算挖隧道，什么时候知道挖到山顶正下方了呢？”

但是，这么想是很重要的。要自己开动脑筋，思考老师的说法到底对不对。

学生：也就是说，少年畑村把数学问题当成了实际问题。

畑村：是啊。我这边在拼命想怎么测距离，老师却在讲纯逻辑的东西。老师要教的是理论，所以才举出这种奇怪的例子。

如果要教理论，可以举别的合适的例子，不要举挖隧道的例子。这样学生也好理解，因为举的例子不合实际，才会出现问题。所以我曾对老师说：“老师，这样可不行啊！”

我这么说，并不是对老师有敌对情绪。而是因为我一直以来都是自己动脑筋理解问题。多思考，才能理解。思考就是自己在脑子里制造“模板”。

自己动脑筋，就会发现老师的漏洞。不能做到这一点的孩子，只能按照由A到B，由B到C，由C到D的顺序前进，知其然不知其所以然，最终还是没能理解。

一个班有几十个学生，老师也很辛苦，不过，A→B→C→D这种死板的教法，早晚弄得大家都讨厌数学。如果说数学只是理论，与现实生活没有联系，那没有人喜欢是正常的，但实际上不是这样的。

学生：确实是单方面的填鸭式教育，老师只教自己想教的东西，不顾学生的感受。

畑村：就我看来，数学教学是粗暴地把形式化的东西灌输给学生。但是，越是灌输，学生越有抗拒感。像我这样没有耐心的家伙肯定会大叫："受不了了！不学了！"觉得上课很无趣，就完全不听讲了。

不过，我很喜欢数学、物理这种可以开动脑筋思考问题的科目，基本上是自己动脑筋思考学习的，在老师教之前就已经弄懂了。

可是，太沉迷于数学脑子会变得不正常，连吃饭都不会了。最后父亲说："你不能再埋头学习了。"

学生：您那时候成绩怎么样？

畑村：初中三年级以前是中等，到三年级快结束时变成了第一名。

学生：那是因为，像老师刚才说的，您脑子里储存了很多模板吧。

畑村：大概是吧。我初中三年级以前，都是放学了就去玩儿，回家吃完晚饭就睡觉。晚上9点就睡了，早上也从没有过了9点还不起床。不过，我始终都在自己动脑筋思考问题。所以，就我的经验来说，希望大

家不要再做死记公式这类蠢事，应该自己在头脑里创造公式。与其死记硬背，不如自己动手创造。

通过思考，大脑中会形成生成公式的回路。也就是说，脑中生成了思考的程序。这就是模板。通过思考，脑中储存了各种各样的模板。脑中有多少模板，这一点至关重要。

怎么样？听了我讲的这些，大家是不是感到很痛快。

学生：老师刚才举的求山的高度例子，听了很痛快。可能加藤老师小时候，他的老师也是这么教他的吧。

畑村：嗯，我也这么想。不然教科书上应该有提示："这么教学生比较容易理解。"不过，加藤老师是个好老师，他肯定和其他老师讨论过，觉得这个例子不错。

确实，刚才那个例子，从数学上来讲一点也没错。但要问它是否实用，那就完全不行。这样学到的东西，一点也派不上用场。用那种方法可以测山的高度，我也从来没有听说过。

学生：不过，这个例子要讲的是，一般情况下无法测量的东西，可以用这种简单的方法计算出来，这才是关键吧。

畑村：对。不过，我会把问题放在现实中来思考，追问"该怎么测量"，然后动用所有的知识，找出测量的方法。找不出来的话，就觉得老师说的不可信了。

图书在版编目(CIP)数据

图解数学学习法：让抽象的数学直观起来／〔日〕畑村洋太郎著；刘玮译．—海口：南海出版公司，2008.1
ISBN 978-7-5442-3914-1

Ⅰ．图…　Ⅱ．①畑…②刘…　Ⅲ．数学－学习方法－通俗读物　Ⅳ．O1-49

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2007）第 187578 号

著作权合同登记号　图字：30-2007-105

TUJIE SHUXUE XUEXIFA：RANG CHOUXIANG DE SHUXUE ZHIGUAN QILAI
图解数学学习法：让抽象的数学直观起来

作　　者　〔日〕畑村洋太郎
译　　者　刘　玮
责任编辑　林妮娜　　特邀编辑　李玉珍
丛书策划　新经典文化 www.readinglife.com
装帧设计　徐　蕊　　内文制作
封面插图　陈　昭
出版发行　南海出版公司　　电话（0
社　　址　海口市海秀中路 51 号星华大厦五楼
电子邮箱　nanhaicbgs@yahoo.com.cn
经　　销　新华书店
印　　刷　三河市三佳印刷装订有限公司
开　　本　710 毫米 × 930 毫米　1/16
印　　张　11
字　　数　180 千
版　　次　2008 年 1 月第 1 版　2008 年 1 月第 1 次印刷
书　　号　ISBN 978-7-5442-3914-1
定　　价　20.00 元



图解 数学学习法

让抽象的数学直观起来

没有照本宣科的枯燥理论，没有令人费解的逻辑推理，也没有复杂的运算。本书用直观的图解，让你彻底搞清楚抽象的数学概念、定理和公式；用贴近生活的例子，让深奥的数学知识变得通俗易懂；从学有所用的角度出发，重新唤起你对数学的兴趣。

图解数学学习法，从根本上提高你的数学理解力！





ISBN 978-7-5442-3914-
9 787544 239



定价 20.00元